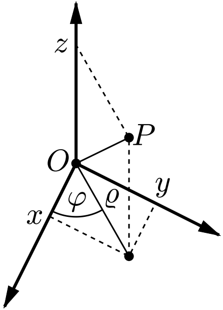
Zylinderkoordinaten

Ein Punkt $P = (x, y, z)$ kann durch den Winkel φ zwischen der x-Achse und der Projektion von $\overline{OP}$ auf die xy-Ebene, die Länge ϱ der Projektion und die z-Koordinate dargestellt werden.



Der Winkel φ der Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) ist nur bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt. Als Standardbereich wird meist $\varphi \in (-\pi, \pi]$ vereinbart.

Für $x = y = 0$ (Punkt auf der z-Achse) ist φ beliebig; als kanonischer Wert kann Null gewählt werden.

Es gilt

$$x = \varrho \cos\varphi, \quad y = \varrho \sin\varphi, \quad z = z$$

bzw. für $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z\,,$$

wobei je nach Vorzeichen von x und y ein geeigneter Zweig des Arcustangens zu wählen ist. Mit dem Hauptzweig-Winkel $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ gilt bei Wahl des Standardbereichs für φ

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, & \text{für } x > 0, \\ \operatorname{sign}(y)\pi/2, & \text{für } x = 0 \ \wedge\ y \neq 0 \\ \varphi_H + \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y \geq 0, \\ \varphi_H - \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y < 0. \end{cases}$$

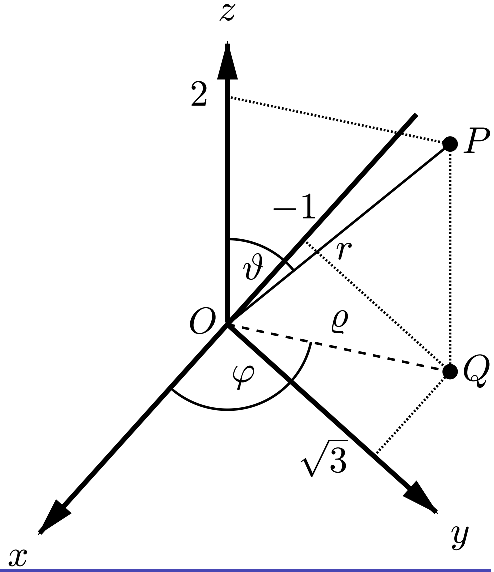
Beispiel

Zylinder- und Kugelkoordinaten,

$$(\varrho, \varphi, z) \quad \text{bzw.} \quad (r, \vartheta, \varphi)\,,$$

des Punkts

$$P = (x, y, z) = (-1, \sqrt{3}, 2)$$



- Abstände vom Ursprung:

$$\begin{aligned} \varrho &= |\overline{OQ}| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = 2, \\ r &= |\overline{OP}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{1+3+4} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

- Winkel mit der x-Achse:

$$\varphi = \arctan(y/x) + \pi = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi$$

  (Addition von π zum Winkel $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ des Hauptzweigs des Arkustangens wegen $x < 0$ und $y > 0$)

- Winkel mit der z-Achse:

$$\vartheta = \arccos(z/r) = \arccos(1/\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$$

alternative Winkelbestimmung:

$X = (x, 0, 0), O, Q$ bilden die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks

$\implies$

$$\sphericalangle(X, O, Q) = \pi/3, \quad \varphi = \pi - \pi/3 = 2\pi/3$$

$Z = (0, 0, z), O, P$ bilden ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck

$\implies$

$$\vartheta = \sphericalangle(Z, O, P) = \pi/4$$