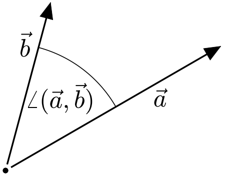
Winkel zwischen zwei Vektoren

Für $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ bezeichnet man mit $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$ den kleineren der beiden Winkel, den die mit den Vektoren assoziierten Pfeile in einem gemeinsamen Scheitelpunkt bilden.



Die beiden Vektoren sind orthogonal, $\vec{a} \perp \vec{b}$, wenn $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/2$ oder ein Vektor der Nullvektor ist.

Winkel können mit Hilfe des Skalarproduktes berechnet werden:

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\,.$$

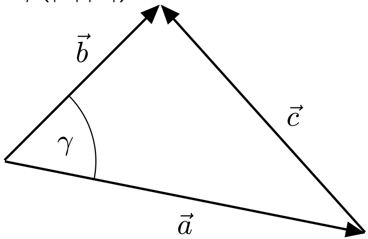
Einige Kosinuswerte:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Beweis

Herleitung der Formel $\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b}/(|\vec{a}|\,|\vec{b}|)$ mit dem Kosinussatz

$$2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\gamma = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2$$



Einsetzen von $\vec{c} = (-\vec{a}) + \vec{b}$ $\rightsquigarrow$ Vereinfachung der rechten Seite

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b}-\vec{a}|^2 &= \sum_{k=1}^{3} a_k^2 + \sum_{k=1}^{3} b_k^2 - \sum_{k=1}^{3}(b_k - a_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{3} 2 b_k a_k = 2\vec{a}\cdot\vec{b}\,, \end{aligned}$$

wobei $(b_k - a_k)^2 = b_k^2 - 2b_k a_k + a_k^2$ benutzt wurde

Gleichsetzen mit der linken Seite des Kosinussatzes und Division durch 2 $\Longrightarrow$

$$|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\gamma = \vec{a}\cdot\vec{b}\,,$$

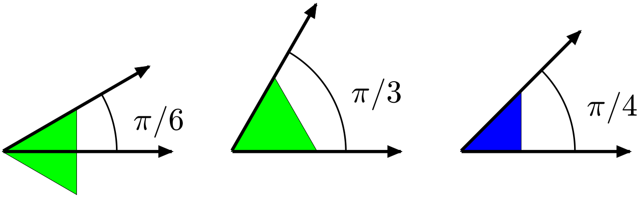
d.h. die behauptete Formel

Beispiel

Darstellung einiger Winkel und Berechnung des Winkels zwischen den Vektoren

$$\vec{a} = (2,1,2)^{\mathrm{t}}, \quad \vec{b} = (4,-1,1)^{\mathrm{t}}$$

(i) Konstruktion mit Hilfe von Dreiecken:



- $\pi/6$: halber Winkel im gleichseitigen Dreieck

$$\vec{a} = (s,0)^{\mathrm{t}} \quad \Longrightarrow \quad \vec{b} \parallel (\sqrt{3}/2, \pm 1/2)^{\mathrm{t}}$$

- $\pi/3$: Winkel im gleichseitigen Dreieck

$$\vec{a} = (s, 0)^{\mathrm{t}} \quad \Longrightarrow \quad \vec{b} \parallel (1/2, \pm\sqrt{3}/2)^{\mathrm{t}}$$

- $\pi/4$: Winkel im rechtwinklig gleichschenkligen Dreieck

$$\vec{a} = (s, 0)^{\mathrm{t}} \quad \Longrightarrow \quad \vec{b} \parallel (\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2)^{\mathrm{t}}$$

(ii) Berechnung mit Hilfe des Skalarproduktes:

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos(\vec{a} \cdot \vec{b}/(|\vec{a}|\,|\vec{b}|))$$

Einsetzen von

$$\begin{array}{rcl} \vec{a} & = & (2, 1, 2)^{\mathrm{t}}, \qquad |\vec{a}| \; = \; \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3 \\ \vec{b} & = & (4, -1, 1)^{\mathrm{t}}, \qquad |\vec{b}| \; = \; \sqrt{16 + 1 + 1} = 3\sqrt{2} \end{array}$$

und $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 9 \quad \rightsquigarrow$

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos(9/(3 \cdot 3\sqrt{2})) = \arccos(1/\sqrt{2}) = \pi/4$$