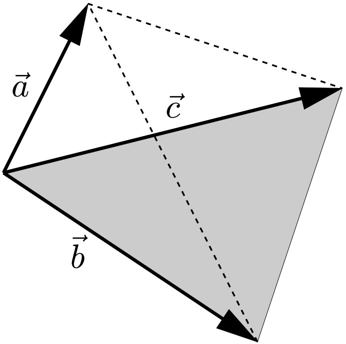
Volumen eines Tetraeders

Das Volumen V eines Tetraeders, der von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird, lässt sich mit Hilfe des Spatproduktes berechnen:

$$V = \frac{1}{6} \left| [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \right| = \frac{1}{6} \left| \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \right| .$$



Beweis

Volumen eines Tetraeders:

$$V = \frac{1}{3} G h$$

mit h der Höhe und G dem Inhalt der Grundfläche des von den Vektoren $\vec{b}$, $\vec{c}$ aufgespannten Dreiecks

G: halbe Parallelogrammfläche $\rightsquigarrow$

$$G = G_{\text{Spat}}/2$$

und

$$V = \frac{1}{6}\, G_{\text{Spat}} h = \frac{1}{6}\, V_{\text{Spat}} = \frac{1}{6}\, |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

mit dem Spatvolumen V_{Spat}

Beispiel

Volumen eines von den Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Tetraeders

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6}\left|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]\right| \\ &= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right| \\ &= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$