Vektorprodukt

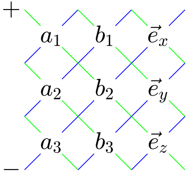
Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{t}}$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)^{\mathrm{t}}$ ist durch

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

definiert.

Bezeichnet man mit $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ die kanonischen Einheitsvektoren, so kann die Berechnung mit dem Sarrus-Schema illustriert werden:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} = & \\ & +a_1 b_2 \vec{e}_z - a_2 b_1 \vec{e}_z \\ & +a_2 b_3 \vec{e}_x - a_3 b_2 \vec{e}_x \\ & +a_3 b_1 \vec{e}_y - a_1 b_3 \vec{e}_y \end{aligned}$$



Die zyklisch ergänzten Diagonalen des Schemas entsprechen den positiven und negativen Termen.

Das Vektorprodukt ist antisymmetrisch,

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}\,,$$

besitzt ansonsten aber die von einem Produkt erwartete Bilinearität:

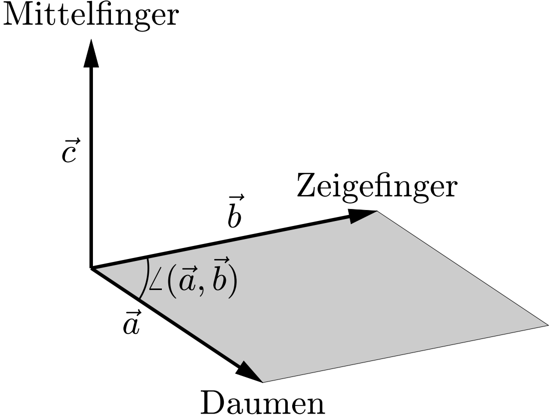
$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \quad \vec{a} \times (s\vec{b}) = s(\vec{a} \times \vec{b}) \text{ für } s \in \mathbb{R}\,.$$

Entsprechendes gilt für das erste Argument. Schließlich ist $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel sind.

Das Vektorprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ lässt sich ebenfalls mit Hilfe der folgenden geometrischen Eigenschaften eindeutig festlegen:
Der Vektor $\vec{c}$ ist zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal, gemäß der Rechten-Hand-Regel orientiert und hat die Länge

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})\,,$$

die dem Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms entspricht.


Mittelfinger
$\vec{c}$
Zeigefinger
$\vec{b}$
$\angle(\vec{a}, \vec{b})$
$\vec{a}$
Daumen

Beweis

(i) Linearität der geometrischen Definition:
Multiplikation mit Skalaren $\quad\checkmark$
Invarianz unter Drehungen $\quad\rightsquigarrow\quad \vec{a} = \vec{e}_z$
additiv bzgl. des zweiten Arguments, da

$$\vec{c} = \vec{e}_z \times (b_1, b_2, b_3)^t = (-b_2, b_1, 0)^t$$

Begründung:

- $\vec{c} \perp \vec{e}_z,\ \vec{b}$
- b_3 irrelevant für den Flächeninhalt (Scherung) $\quad\rightsquigarrow\quad$ o.B.d.A. $b_3 = 0$
  $\sphericalangle(\vec{e_z}, \vec{b}) = \pi/2,\ |\vec{e_z}| = 1 \quad\rightsquigarrow\quad |\vec{c}| \quad \checkmark$
- richtige Orientierung (prüfe alle Vorzeichenkombinationen der b_k mit der „rechten Hand Regel“)

(ii) Übereinstimmung mit der analytischen Definition:
bereits gezeigt für $\vec{a} = \vec{e}_z$, $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ analog
Antisymmetrie $\quad \rightsquigarrow \quad$ richtig für $\vec{a} = \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$
Linearität $\quad \rightsquigarrow \quad$ allgemeiner Fall

(iii) Flächeninhalt A des Parallelogramms:
$A = |\vec{b}|\, h$ mit der Höhe

$$h = |\vec{a}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

Alternative Herleitung der geometrischen Eigenschaften

(i) Orthogonalität:
Einsetzen der Definition von $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \rightsquigarrow$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = a_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

(jeweils zwei gleiche Produkte mit verschiedenem Vorzeichen)
analog: $\vec{b} \perp \vec{c}$

(ii) Länge:

Vergleich beider Seiten der behaupteten Identität

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

Quadrierte linke Seite:

$$\begin{aligned}
&(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = \\
&\quad \left(a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_3^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2\right) - \\
&\quad (a_2 b_3 a_3 b_2 + a_3 b_2 a_2 b_3 + a_3 b_1 a_1 b_3 + a_1 b_3 a_3 b_1 + a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2 b_1 a_1 b_2)
\end{aligned}$$

Quadrierte rechte Seite:

$\sin^2 = 1 - \cos^2$, $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 &= \left(\sum_j a_j^2\right)\left(\sum_k b_k^2\right) - \left(\sum_j a_j b_j\right)\left(\sum_k a_k b_k\right) \\
&= \sum_{j,k,j\neq k} a_j^2 b_k^2 - a_j b_j a_k b_k\,,
\end{aligned}$$

wegen Aufhebung der Terme $a_\ell^2 b_\ell^2$, $-a_\ell b_\ell a_\ell b_\ell$ mit $j = \ell = k$

gleiche 12 Summanden in beiden Fällen

Beispiel

Vektorprodukt $\vec{c}$ der Vektoren $\vec{a} = (2,1,2)^{\mathrm{t}}$, $\vec{b} = (3,3,0)^{\mathrm{t}}$

(i) Geometrische Definition:
$\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{c} = \lambda(-2,2,1)^{\mathrm{t}}$
Rechte-Hand-Regel $\quad \Longrightarrow \quad \lambda > 0$
Winkel

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{9}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Longrightarrow \quad \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/4$
Fläche des aufgespannten Parallelogramms

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 9$$

$\rightsquigarrow \quad \lambda = |\vec{c}|/|(-2,2,1)^{\mathrm{t}}| = 9/3 = 3$, d.h.

$$\vec{c} = \lambda(-2,2,1)^{\mathrm{t}} = (-6,6,3)^{\mathrm{t}}$$

(ii) Analytische Definition:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Vektorprodukte der kanonischen Basisvektoren

$$\vec{e}_x = (1,0,0)^{\mathrm{t}},\ \vec{e}_y = (0,1,0)^{\mathrm{t}},\ \vec{e}_z = (0,0,1)^{\mathrm{t}}$$

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, & \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, & \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \\ \vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{0}, & \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{0}, & \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0} \end{array}$$

zyklische Verschiebung bei den ersten drei Identitäten

$$x\,y\,z \to y\,z\,x \to z\,x\,y$$

Vorzeichenänderung bei Vertauschung von Basisvektoren, z.B.

$$\vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z$$

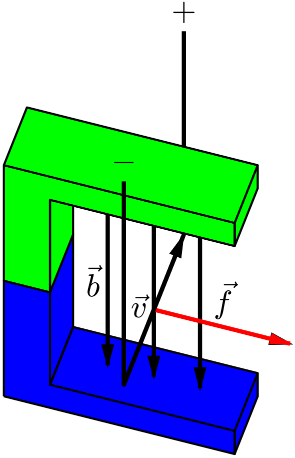
Gültigkeit entsprechender Formeln für eine beliebige, gemäß der Rechten-Hand-Regel orientierte Orthonormalbasis

Beispiel

Lorentzkraft für ein Elektron mit Ladung $-e$ und Geschwindigkeit $\vec{v}$ in einem Magnetfeld $\vec{b}$

Auslenkung des stromdurchflossenen Leiters in Richtung

$$\vec{f} = e\,\vec{b} \times \vec{v}$$



Regeln für Vektorprodukte

Für Vektorprodukte gelten die folgenden Rechenregeln:

- Antisymmetrie

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\big(\vec{b} \times \vec{a}\big), \quad \vec{a} \times (s\vec{a}) = \vec{0}$$

- Bilinearität

$$\begin{aligned}&\big(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2\big) \times \big(\beta_1 \vec{b}_1 + \beta_2 \vec{b}_2\big) = \\ &\quad \alpha_1\beta_1\big(\vec{a}_1 \times \vec{b}_1\big) + \alpha_1\beta_2\big(\vec{a}_1 \times \vec{b}_2\big) + \alpha_2\beta_1\big(\vec{a}_2 \times \vec{b}_1\big) + \alpha_2\beta_2\big(\vec{a}_2 \times \vec{b}_2\big)\end{aligned}$$

- Grassmann-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a}$$

- Lagrange-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Beweis

(i) Antisymmetrie und Bilinearität: ✓

(ii) Grassmann- und Lagrange-Identität:

Bilinearität $\rightsquigarrow$ o.B.d.A. $\vec{a}$, $\vec{b}$ kanonische Basisvektoren

$\vec{a} = \vec{e}_x = \vec{b}$: beide Seiten der Identitäten Null

$\vec{a} = \vec{e}_x$, $\vec{b} = \vec{e}_y$:

linke Seite der Grassmann-Identität

$$(\vec{e}_x \times \vec{e}_y) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Übereinstimmung mit rechter Seite $c_1\vec{e}_y - c_2\vec{e}_x$

Lagrange-Identität im betrachteten Spezialfall

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ c_1 d_2 - c_2 d_1 \end{pmatrix} = c_1 d_2 - d_1 c_2$$

analoge Argumentation für andere Kombinationen von Basisvektoren

Beispiel

Anwendungen der Regeln für Vektorprodukte

(i) Ausnutzung der Bilinearität bei parallelen Vektoren:

$$\begin{aligned}
&\left(3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right)\times\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right)\\
&=6\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\
&=(6-1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}0-2\\1-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\5\\0\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

wobei neben der Bilinearität die Antisymmetrie ($\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$, $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$) verwendet wurde

(ii) Darstellung von Vektorprodukten mit Hilfe von einfacher berechenbaren Skalarprodukten:

- Grassmann-Identität: $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a} \quad \rightsquigarrow$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- Lagrange-Identität: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad \rightsquigarrow$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0 \cdot 6 - 12 \cdot 1 = -12$$