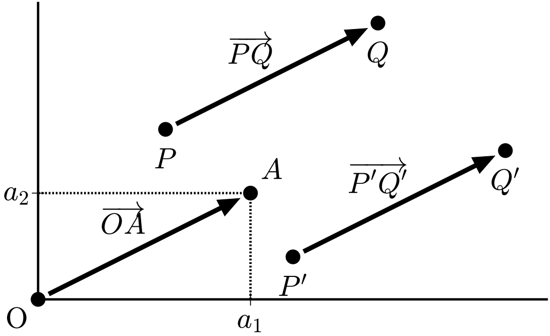
Vektoren in der Ebene und im Raum

Ein Vektor kann geometrisch mit einem Pfeil (gerichtete Strecke) identifiziert werden:

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$$

bezeichnet den Vektor vom Punkt P zum Punkt Q.



Wie aus der Abbildung ersichtlich ist, stellen gleichlange Pfeile mit gleicher Richtung den gleichen Vektor dar, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$. Die spezielle Darstellung bezogen auf den Ursprung O des Koordinatensystems wird als Ortsvektor bezeichnet und definiert die Koordinaten a_k des Vektors, die ebenfalls als Differenzen der Punktkoordinaten (p_1, p_2, p_3), (q_1, q_2, q_3) berechnet werden können:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix} .$$

Insbesondere bewirkt die Umkehrung der Richtung des Vektors eine Änderung des Vorzeichens: $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ} = -\vec{a}$.
Schließlich wird mit

$$\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$$

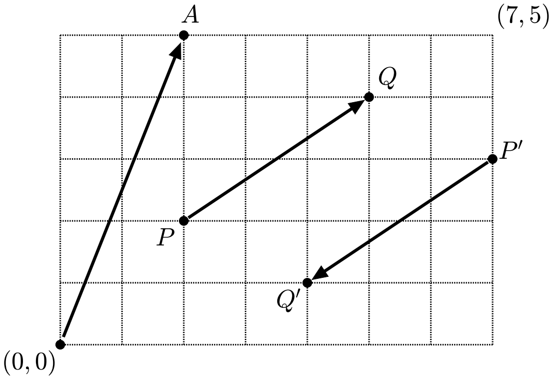
der Nullvektor bezeichnet.

Punktkoordinaten werden als „liegendes“ Tupel (Ebene) oder Tripel (Raum) dargestellt während für Vektoren die „stehende“ Darstellung üblich ist. Durch Transposition (Symbol $^{\mathrm{t}}$) kann zur jeweils anderen Schreibweise gewechselt werden:

$$(p_1, p_2) = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{t}}.$$

Beispiel

Bestimmung der abgebildeten Vektoren



(i) Ortsvektor $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$:
Koordinaten entsprechen denen des Punktes $A = (2, 5)$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(ii) Vektor $\overrightarrow{PQ}$:
Differenzbildung der Koordinaten p_k, q_k der Punkte $P = (2, 2)$, $Q = (5, 4)$
$\leadsto$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 4 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(iii) Vektor $\overrightarrow{P'Q'}$:
gleiche Länge wie $\overrightarrow{PQ}$ und entgegengesetzte Richtung $\implies$ Umkehrung des Vorzeichens, d.h.

$$\overrightarrow{P'Q'} = -\overrightarrow{PQ} = (-3, -2)^{\mathrm{t}}$$

Probe

direkte Berechnung durch Differenzbildung der Punktkoordinaten

$$\overrightarrow{P'Q'} = \begin{pmatrix} q_1' - p_1' \\ q_2' - p_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 7 \\ 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$