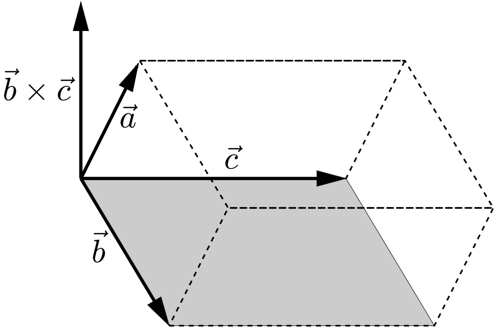
Spatprodukt

Das Spatprodukt

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \\ a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

stimmt bis auf Vorzeichen mit dem Volumen des von den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ aufgespannten Spats überein. Es ist positiv, wenn die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ gemäß der Rechten-Hand-Regel orientiert sind.



Mit Hilfe des ε-Tensors lässt sich das Spatprodukt auch in der Form

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_i b_j c_k$$

schreiben.

Eine weitere äquivalente Darstellung ist die Determinante der aus den drei Vektoren gebildeten Matrix:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} .$$

Beweis

Herleitung der geometrischen Interpretation als Volumen:
Normale des von $\vec{b}$, $\vec{c}$ aufgespannten Parallelogramms

$$\vec{d} = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$$

Höhe des Spats (Länge der Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{d}$)

$$h = |\vec{a}| \left| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{d}) \right| = |\vec{a} \cdot \vec{d}| \, ,$$

da $|\vec{d}| = 1$
Volumen (Produkt aus Höhe h des Spats und Flächeninhalt $|\vec{b} \times \vec{c}|$ des Parallelogramms)

$$\left| \vec{a} \cdot \left(\frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|} \right) \right| |\vec{b} \times \vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

Beispiel

Oberfläche und Volumen des von den Vektoren

$$\vec{a} = (0,1,0)^\mathrm{t}, \quad \vec{b} = (2,0,3)^\mathrm{t}, \quad \vec{c} = (3,1,2)^\mathrm{t}$$

aufgespannten Spats

(i) Oberfläche:
$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \rightsquigarrow \quad$ Rechteck $\quad \rightsquigarrow \quad F_{ab} = 1 \cdot \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$
Scherung ($\vec{c} \to \vec{c} - \vec{a}$) und Permutation $\quad \rightsquigarrow \quad F_{ac} = F_{ab}$

$$F_{bc} = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 25 + 4} = \sqrt{38}$$

Oberfläche: $2F_{ab} + 2F_{ac} + 2F_{bc} = 4\sqrt{13} + 2\sqrt{38} \approx 26.75$

(ii) Volumen: $|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 5$

Eigenschaften des Spatprodukts

Das Spatprodukt ist linear in jedem Argument und besitzt darüber hinaus die folgenden weiteren Eigenschaften.

- zyklische Vertauschung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

- lineare Abhängigkeit:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{0} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

  mit mindestens einem der Skalare α, β, γ ungleich 0.

- Orientierung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] > 0$$

  für jedes Rechtssystem.