Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist durch

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

definiert. Es lässt sich ebenfalls mit Hilfe des Winkels zwischen den Vektoren berechnen:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \,.$$

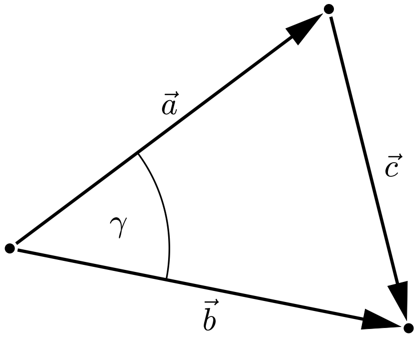
Offensichtlich ist $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ sowie $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$, und aus $|\cos \varphi| \leq 1$ folgt die Ungleichung von Cauchy-Schwarz:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}|\,|\vec{b}| \,.$$

Es gelten die für Produkte üblichen Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a} \,, \\ \left(r\vec{a} + s\vec{b}\right) \cdot \vec{c} &= r\vec{a} \cdot \vec{c} + s\vec{b} \cdot \vec{c}, \quad r, s \in \mathbb{R} \,. \end{aligned}$$

Beweis



Herleitung der Äquivalenz der alternativen Definitionen mit Hilfe des Kosinussatzes:

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma$$

Umformung $\rightsquigarrow$

$$2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)$$

Substitution $c_i^2 = (b_i - a_i)^2$ $\rightsquigarrow$ Vereinfachung der rechten Seite zu

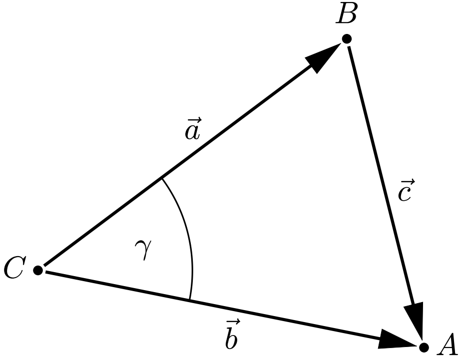
$$2a_1b_1 + 2a_2b_2 + 2a_3b_3$$

Beispiel

Winkelberechnung und Illustration des Kosinussatzes für ein Dreieck mit Eckpunkten

$$A = (6,0), \quad B = (4,4), \quad C = (0,0)$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\
\vec{b} &= \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{c} &= \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$



- Winkelberechnung mit Hilfe des Skalarproduktes:

$$\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{24}{\sqrt{32}\cdot 6} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad \gamma = \frac{\pi}{4}$$

- Illustration des Kosinussatzes:
  $\vec{a} = (4,4)^t$, $\vec{b} = (6,0)^t$, $\vec{c} = (2,-4)^t$, $\gamma = \pi/4 \quad \rightsquigarrow$

$$|\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 20 - 32 - 36 = -48$$

  und

$$-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma = -2\,(4\sqrt{2})\,6/\sqrt{2} = -48 \quad \checkmark$$