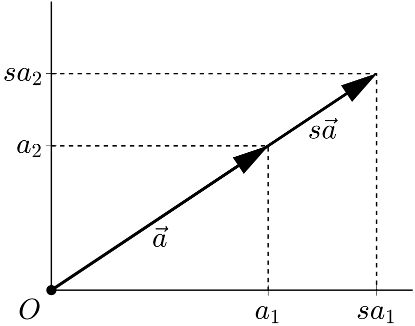
Skalarmultiplikation

Bei Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einem Skalar s ($s \in \mathbb{R}$) werden die Koordinaten a_k mit s multipliziert:

$$s \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_1 \\ sa_2 \\ sa_3 \end{pmatrix} .$$



Die Multiplikation mit s bewirkt eine Skalierung der Länge des Vektors um den Faktor $|s|$. Die Richtung bleibt für $s > 0$ unverändert; für $s < 0$ kehrt sie sich um.

Speziell ist $0\vec{a} = \vec{0}$.

Beispiel

Linearkombinationenen der Vektoren

$$\vec{a} = (2, -3, 1)^{\mathrm{t}}, \quad \vec{b} = (1, -2, 0)^{\mathrm{t}}$$

(i) $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$:
Multiplikation mit den Skalaren 2, 3

$$2\vec{a} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad 3\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bilden der Differenz $\quad \rightsquigarrow$

$$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ -6-(-6) \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(ii) $\vec{d} = 3\vec{c} + 2\vec{b}$:

$$3\vec{c} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad 2\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

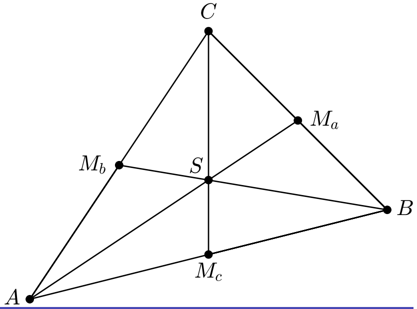
alternativ:

$$\begin{aligned} \vec{d} &= 3\vec{c} + 2\vec{b} = 3(2\vec{a} - 3\vec{b}) + 2\vec{b} = 6\vec{a} - 7\vec{b} \\ &= 6\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 7 \\ -18 - (-14) \\ 6 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Beispiel

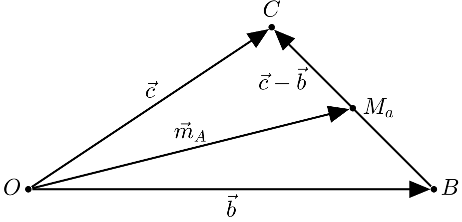
Schnittpunkt S (Schwerpunkt) der Seitenhalbierenden in einem Dreieck:

$$\vec{s} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$$



Herleitung durch Darstellung der Punkte mit Hilfe von Ortsvektoren

$$A \to \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad M_a \to \vec{m_a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM_a} = \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}), \quad \text{etc.}$$



Einsetzen von $\vec{m}_a = (\vec{b}+\vec{c})/2$ in die Parametrisierung

$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{m}_a - \vec{a}), \quad t \in [0,1]\,,$$

der Verbindungsstrecke $\overline{AM_a}$ $\quad\rightsquigarrow$

$$\vec{p} = \vec{a} + t\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}\right)$$

$t = 2/3 \quad\Longrightarrow\quad \vec{p} = \vec{s} = (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})/3$, d.h. S teilt $\overline{AM_a}$ im Verhältnis $2/3 : 1/3 \sim 2:1$

analoges Argument für $\overline{BM_b}$ und $\overline{CM_c}$

$\rightsquigarrow$ gemeinsamer Punkt S der drei Seitenhalbierenden