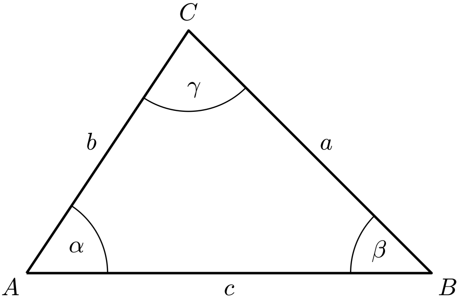
Sinussatz

In einem Dreieck verhalten sich die Längen der Seiten wie die Sinuswerte der gegenüberliegenden Winkel:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

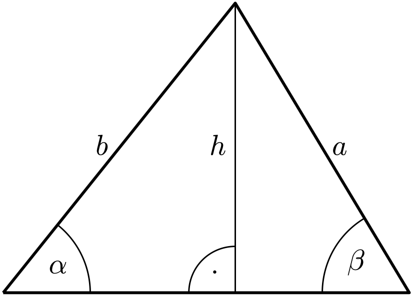
bzw.

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c\,.$$



Beweis

Zerlegung des Dreiecks in zwei durch die Höhe zur Seite $\overline{AB}$ begrenzte rechtwinklige Teildreiecke



Definition des Sinus (Gegenkathete : Hypothenuse) $\quad \Longrightarrow$

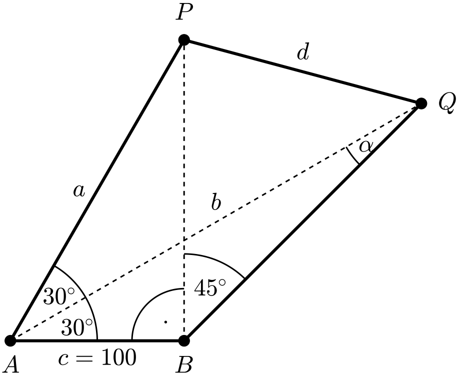
$$\sin\alpha = \frac{h}{b}, \quad \sin\beta = \frac{h}{a}$$

und somit

$$\sin\alpha : \sin\beta = \frac{h}{b} : \frac{h}{a} = a : b$$

Beispiel

Entfernung d zweier schwer zugänglicher Punkte P und Q durch Messung der Winkel an den Enden einer Referenzstrecke $\overline{AB}$



(i) Numerische Lösung:
$\sphericalangle(APB) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, $\sin 30^\circ = 1/2 \quad \rightsquigarrow$

$$a = 100/\sin 30^\circ = 200$$

Winkelsumme gleich $180^\circ \quad \rightsquigarrow$

$$\alpha = 15^\circ$$

Sinussatz $\quad \Longrightarrow \quad b : 100 = \sin 135^\circ : \sin 15^\circ$, d.h.

$$b \approx 100 \cdot 0.7071/0.2588 = 273.2$$

Kosinussatz $\quad \Longrightarrow \quad d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 30^\circ$, d.h.

$$d \approx (40000 + 74640 - 2 \cdot 54640 \cdot 0.8660)^{1/2} = 141.4$$

(ii) Exakte algebraische Rechnung:

$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ und $\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi \quad \Longrightarrow$

$$1/2 = \sin(30^\circ) = 2s\underbrace{\sqrt{1-s^2}}_{\cos(15^\circ)}, \quad s = \sin(15^\circ)$$

d.h. nach Quadrieren

$$\frac{1}{4} = 4s^2(1-s^2) \quad \Leftrightarrow \quad s^4 - s^2 + \frac{1}{16} = 0$$

Lösungsformel für quadratische Gleichungen $\quad \Longrightarrow$

$$s^2 = 1/2 \pm \sqrt{1/4 - 1/16} = 1/2 \pm \sqrt{3}/4$$

Lösung im Intervall $(0, \sin 30^\circ) = (0, 1/2) \quad \Longrightarrow \quad s = \sqrt{2-\sqrt{3}}/2$

Skalierung der Längen mit dem Faktor $1/100$, $\cos(30^\circ) = \sqrt{3}/2 \quad \rightsquigarrow$

$$\tilde{a} = a_{\text{skaliert}} = 2, \quad \tilde{b} = \frac{1 \cdot \sin 135^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

$$\tilde{d}^2 = \tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 - 2\tilde{a}\tilde{b}\cos 30^\circ$$

$$= \quad 4 + \frac{4}{2(2-\sqrt{3})} - 2\cdot 2\cdot \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2$$

$\rightsquigarrow \quad \tilde{d} = d_{\text{skaliert}} = \sqrt{2}$ und $d = 100\sqrt{2}$

(iii) Beweis der letzten Gleichheit:
Umformung $\rightsquigarrow$

$$2+\frac{2}{2-\sqrt{3}} \overset{!}{=} \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

$\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2+\sqrt{3} \quad \rightsquigarrow \quad$ vereinfachte linke Seite

$$2+2(2+\sqrt{3}) = 6+\sqrt{3}$$

Quadrieren der Identität $\rightsquigarrow$

$$36+24\sqrt{3}+12 \overset{!}{=} \frac{48}{2(2-\sqrt{3})}$$

Übereinstimmung nach Rationalisieren des Nenners der rechten Seite durch Erweitern mit $2+\sqrt{3}$

$$\frac{48(2+\sqrt{3})}{2(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{96+48\sqrt{3}}{2(4-3)}$$