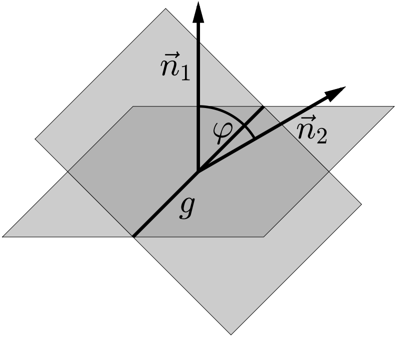
Schnitt zweier Ebenen

Zwei Ebenen

$$E_k : \vec{x} \cdot \vec{n}_k = d_k, \quad k = 1, 2\,,$$

schneiden sich genau dann in einer Geraden g, wenn die Normalenvektoren $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ nicht parallel sind.



Für den kleineren der beiden Schnittwinkel, $\varphi \in (0, \pi/2]$, gilt

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\,.$$

Die Schnittgerade g hat die Richtung

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \,.$$

Einen Punkt P auf g kann man durch simultanes Einsetzen in beide Ebenengleichungen bestimmen,

$$\vec{p} \cdot \vec{n}_1 = d_1, \quad \vec{p} \cdot \vec{n}_2 = d_2 \,,$$

und mit einer Lösung $(p_1, p_2, p_3)^{\mathrm{t}}$ des resultierenden unterbestimmten linearen Gleichungssystems erhält man die Parameterdarstellung

$$g:\ \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R} \,.$$

Beispiel

Schnitt der Ebenen durch die Punkte $Q_1 = (1,2,0)$, $Q_2 = (0,1,3)$ mit den Normalenvektoren $\vec{n}_1 = (1,-1,0)^{\mathrm{t}}$, $\vec{n}_2 = (0,-1,1)^{\mathrm{t}}$

Schnittwinkel

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|1\cdot 0 + (-1)(-1) + 0\cdot 1|}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$\implies \quad \varphi = \pi/3$

Richtung der Schnittgeraden g

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmung eines Punkts P auf g durch Lösung der Ebenengleichungen $E_k:\ \vec{p}\cdot\vec{n}_k = \vec{q}_k\cdot\vec{n}_k$:
Einsetzen von $\vec{q_1}\cdot\vec{n}_1 = (1,2,0)^\mathrm{t}\cdot(1,-1,0)^\mathrm{t} = -1$ und $\vec{q_2}\cdot\vec{n}_2 = (0,1,3)^\mathrm{t}\cdot(0,-1,1)^\mathrm{t} = 2, \quad \leadsto$

$$E_1:\ p_1 - p_2 = -1, \quad E_2:\ -p_2 + p_3 = 2$$

unterbestimmtes Gleichungssystem, eine Komponente frei wählbar, z.B.

$$p_2 = 0 \quad \leadsto \quad p_1 = -1,\ p_3 = 2$$

resultierende Parameterdarstellung der Schnittgeraden

$$g:\ \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Beispiel

Winkel zwischen Flächen eines regelmäßigen Tetraeders mit Eckpunkten
$A = (1, 0, 0)$, $B = (-1, 0, 0)$, $C = (0, 1, \sqrt{2})$, $D = (0, -1, \sqrt{2})$

Kontrolle der Seitenlängen

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-1-1)^2 + 0 + 0} = 2,\ |\overline{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2} = 2,\ \ldots \checkmark$$

Winkelberechnung z.B. für die Ebenen durch A, B, C und A, B, D
Normalenvektoren

$$\begin{array}{rcccccc} \vec{n}_1 & = & \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} & = & (-2, 0, 0)^{\mathrm{t}} \times (-1, 1, \sqrt{2})^{\mathrm{t}} & = & (0, 2\sqrt{2}, -2)^{\mathrm{t}} \\ \vec{n}_2 & = & \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} & = & (-2, 0, 0)^{\mathrm{t}} \times (-1, -1, \sqrt{2})^{\mathrm{t}} & = & (0, 2\sqrt{2}, 2)^{\mathrm{t}} \end{array}$$

Schnittwinkel

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{4}{\sqrt{12}\sqrt{12}} = \frac{1}{3}$$

$\rightsquigarrow \quad \varphi \approx 70.53^\circ$