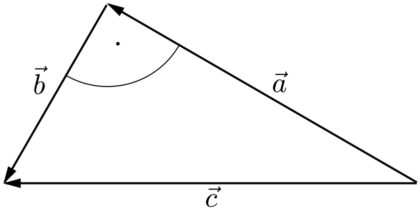
Satz des Pythagoras

Die Längen $a = |\vec{a}|$, $b = |\vec{b}|$ der Katheten und die Länge $c = |\vec{c}|$ der Hypothenuse in einem von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, gebildeten rechtwinkligen Dreieck erfüllen



$$a^2 + b^2 = c^2 \,.$$

Für die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ gilt entsprechend

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Longrightarrow \quad |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\underbrace{\vec{a} + \vec{b}}_{\vec{c}}|^2 \,.$$

Der Satz ist heute als Satz des Pythagoras (569-475 v. Chr.) bekannt, obwohl ihn bereits die Babylonier mehr als 1000 Jahre früher kannten. Möglicherweise war aber Pythagoras der erste, der ihn bewiesen hat.

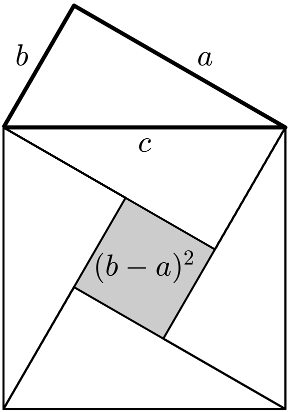
Beweis

(i) Geometrische Argument:
Unterteilung des Quadrats über der Hypothenuse in 4 zum Ausgangsdreieck kongruente Dreiecke und ein Quadrat mit Seitenlänge $b - a$

Flächeninhalt des Dreiecks: $ab/2$

Summierung der Flächeninhalte (4 Dreiecke und ein Quadrat) $\implies$

$$\begin{aligned} c^2 &= 4(ab/2) + (b-a)^2 \\ &= 2ab + (b^2 - 2ab + a^2) \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$



(ii) Vektorkalkül:
$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} |\vec{c}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a}}_{=0,\ \text{da } \vec{a} \perp \vec{b}} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Konsistenz zu den Regeln für Skalarprodukte

kein Beweis, da der Satz des Pythagoras bei der Berechnung der Vektorlänge,

$$|\vec{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2 \,,$$

benutzt wird

Beispiel

Konstruktion Pythagoräischer Tripel:

$$\ell, m, n \in \mathbb{N}: \quad \ell^2 + m^2 = n^2\,,$$

d.h. ganzzahlige Seitenlängen für rechtwinklige Dreiecke

Anwendung durch die Ägypter: Konstruktion rechter Winkel via Ergänzung ungerader Zahlen ℓ durch $m = (\ell^2 - 1)/2$ und $n = (\ell^2 + 1)/2$ zu einem Pythagoräischen Tripel:

$$\begin{aligned} \ell^2 + m^2 &= \ell^2 + \frac{\ell^4 - 2\ell^2 + 1}{4} \\ &= \frac{\ell^4 + 2\ell^2 + 1}{4} \\ &= \left(\frac{\ell^2 + 1}{2}\right)^2 = n^2 \end{aligned}$$

Multiplikation der Tripel mit 2 $\quad\rightsquigarrow\quad$ Tripel für jede gerade Zahl $\ell \geq 6$

allgemeineres Konstruktionsprinzip mit Hilfe der dritten Binomischen Formel

$$c^2 - b^2 = (c - b)(c + b) = a^2$$

$\rightsquigarrow$ ganzzahlige Lösung, wenn a^2 in zwei unterschiedliche Faktoren zerlegbar ist, die eine gerade Differenz ($= 2b$) aufweisen

Für ungerades $a = \ell$ gilt dies für die Aufteilung $a^2 = a^2 \cdot 1$ mit

$$b = \frac{a^2 - 1}{2}, \quad c = \frac{a^2 + 1}{2}$$

$\rightsquigarrow$ obiger Spezialfall