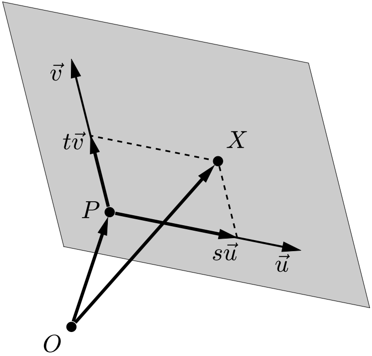
Parameterdarstellung einer Ebene



Die Punkte X auf einer Ebene durch einen Punkt P, die von zwei nicht parallelen Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannt wird, erfüllen

$$\overrightarrow{PX} = s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s, t \in \mathbb{R}\,.$$

Entsprechend gilt

$$x_i = p_i + su_i + tv_i, \quad i = 1, 2, 3\,.$$

für die Koordinaten der Ortsvektoren $\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u} + t\vec{v}$.

Beispiel

Punktprobe ($(2,-1,0) \in E$?, $(0,-1,2) \in E$?) für die Ebene E durch den Punkt $P = (1,2,3)$, aufgespannt von den Vektoren $\vec{u} = (2,0,0)^{\mathrm{t}}$, $\vec{v} = (1,1,1)^{\mathrm{t}}$

Parameterdarstellung

$$E:\ (s,t) \mapsto \vec{p} + s\vec{u} + t\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$X \in E \quad \Leftrightarrow$
$\exists$ Lösung (s,t) des überbestimmten Gleichungssystems

$$\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u} + t\vec{v}$$

oder (alternativ)
$\vec{x} - \vec{p}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ spannen kein echtes Spat auf ($\Leftrightarrow$ liegen in einer Ebene), d.h.

$$[\vec{x} - \vec{p}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$$

(i) $X = (2, -1, 0)$:
Einsetzen in die Parameterdarstellung $\rightsquigarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösen des überbestimmten linearen Gleichungssystems
zweite Komponente: $-1 = 2 + t \quad \implies \quad t = -3$
erste Komponente: $2 = 1 + 2s + (-3) \quad \implies \quad s = 2$
konsistent mit dritter Komponente: $0 = 3 + 0 + (-3)$
$\implies \quad X \in E$

(ii) $X = (0, -1, 2)$:
Anwendung des Spatprodukt-Kriteriums

$$
\begin{aligned}
0 \overset{!}{=} [\vec{x} - \vec{p}, \vec{u}, \vec{v}] &= \begin{pmatrix} 0-1 \\ -1-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \neq 0
\end{aligned}
$$

$\implies \quad X \notin E$