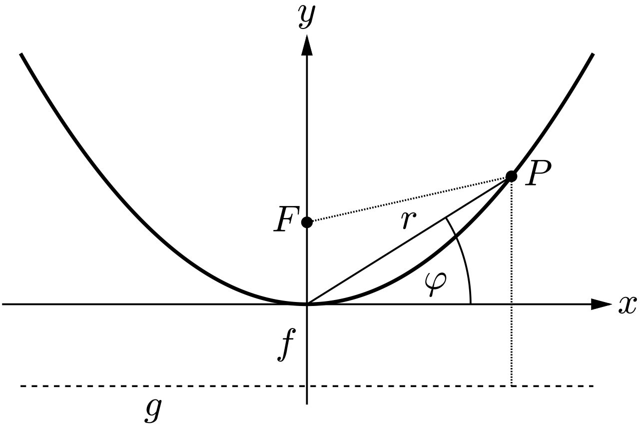
Parabel

Die Punkte $P = (x, y)$ auf einer Parabel haben von einem Brennpunkt F und einer Leitgerade g den gleichen Abstand f.



Ist $F = (0, f)$ und $g:\ y = -f$, so gilt für die Koordinaten

$$4f\,y = x^2$$

und

$$r = \frac{4f \sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

für die Polarkoordinaten der Punkte P.

Beweis

(i) Äquivalenz der Darstellungen:
Gleichsetzen der quadrierten Abstände $\quad\rightsquigarrow$

$$|\overrightarrow{PF}|^2 = x^2 + (y-f)^2 = (y+f)^2 = (\operatorname{dist}(P,g))^2$$

Vereinfachung $\quad\rightsquigarrow$

$$x^2 = 4f\,y$$

(ii) Polarform:
Substitution

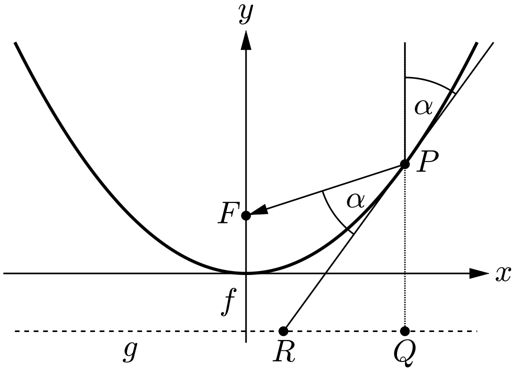
$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

$\rightsquigarrow$

$$r^2\cos^2\varphi = 4f\,r\sin\varphi$$

Beispiel

Bündelung senkrecht zur Leitgerade einfallender Strahlen im Brennpunkt



Herleitung der Reflektionseigenschaft, d.h.

$$\alpha = \sphericalangle(F, P, R) \stackrel{!}{=} \sphericalangle(Q, P, R)$$

($\sphericalangle(Q, P, R)$ ist Gegenwinkel zum Winkel des senkrecht einfallenden Strahls mit der Tangente, d.h. Einfallswinkel = Ausfallswinkel)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{QP} &= \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ -f \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x^2/(2f) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\implies \quad \overrightarrow{FP} + \overrightarrow{QP} \parallel (1, x/(2f))^{\mathrm{t}}$, der Richtung der Tangente im Punkt $P = (x, x^2/(4f))$, d.h.

$$\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{QP} = s\overrightarrow{RP}$$

Berechnung der Winkel mit Hilfe der Vektorprodukts

$$
\begin{aligned}
\sin \sphericalangle(F,P,R) &= \frac{|\overrightarrow{FP} \times \overrightarrow{RP}|}{|\overrightarrow{FP}|\,|\overrightarrow{RP}|} \\
\sin \sphericalangle(Q,P,R) &= \frac{|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{RP}|}{|\overrightarrow{QP}|\,|\overrightarrow{RP}|} = \frac{|(s\overrightarrow{RP} - \overrightarrow{FP}) \times \overrightarrow{RP}|}{|\overrightarrow{QP}|\,|\overrightarrow{RP}|} = \frac{|\overrightarrow{FP} \times \overrightarrow{RP}|}{|\overrightarrow{QP}|\,|\overrightarrow{RP}|}
\end{aligned}
$$

$|\overrightarrow{FP}| = |\overrightarrow{QP}|$ (definierende Eigenschaft der Parabel) $\implies$ Gleichheit der Winkel, die beide kleiner als $\pi/2$ sind