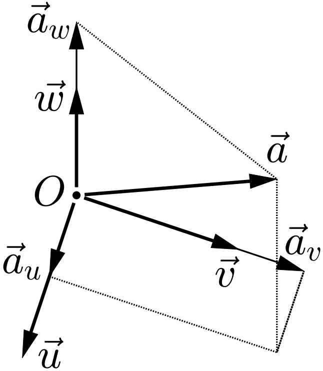
# Orthogonale Basis in der Ebene und im Raum

Eine orthogonale Basis im Raum besteht aus drei paarweise orthogonalen Vektoren

$$\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\,,$$

jeweils ungleich $\vec{0}$.

Die Basis ist ein Rechtssystem, wenn die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ gemäß der Rechten-Hand-Regel orientiert sind (Daumen $\to$ $\vec{u}$, Zeigefinger $\to$ $\vec{v}$, Mittelfinger $\to$ $\vec{w}$), bzw. äquivalent dazu, wenn das Spatprodukt $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ positiv ist.




Sind $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ normiert ($|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = 1$), so spricht man von einer Orthonormalbasis.

Analog bilden zwei orthogonale Vektoren $\vec{u} = (u_1, u_2)^{\mathrm{t}}$, $\vec{v} = (v_1, v_2)^{\mathrm{t}}$, jeweils $\neq \vec{0}$, eine orthogonale Basis in der Ebene. Die Basis ist positiv orientiert, wenn $u_1 v_2 - u_2 v_1 > 0$.

Jeder Vektor $\vec{a}$ lässt sich als Linearkombination

$$\vec{a} = r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w}, \quad r = \frac{\vec{a}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2},\, s = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2},\, t = \frac{\vec{a}\cdot\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\,,$$

darstellen. Die Summanden $\vec{a}_u = r\vec{u}$, $\vec{a}_v = s\vec{v}$, $\vec{a}_w = t\vec{w}$ sind die Projektionen $\vec{a}_u$, $\vec{a}_v$, $\vec{a}_w$, auf die durch die Basisvektoren erzeugten Achsen, d.h.

$$\vec{a}_u \parallel \vec{u}, \quad \vec{a} - \vec{a}_u \perp \vec{u}\,,$$

etc., und in Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras gilt $|\vec{a}|^2 = |\vec{a}_u|^2 + |\vec{a}_v|^2 + |\vec{a}_w|^2$ bzw.

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 &= r^2\,|\vec{u}|^2 + s^2\,|\vec{v}|^2 + t^2\,|\vec{w}|^2 \\ &= \frac{|\vec{a}\cdot\vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{|\vec{a}\cdot\vec{v}|^2}{|\vec{v}|^2} + \frac{|\vec{a}\cdot\vec{w}|^2}{|\vec{w}|^2}\,. \end{aligned}$$

Speziell ist

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z$$

für die kanonische Orthonormalbasis

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des kartesischen Koordinatensystems.

## Beweis

(i) Berechnung der Basis-Koeffizienten:
Multiplikation des Ansatzes

$$\vec{a} = r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w}$$

mit $\vec{u}$ unter Berücksichtigung von $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$, $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \quad \Longrightarrow$

$$\vec{a} \cdot \vec{u} = (r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w}) \cdot \vec{u} = r|\vec{u}|^2$$

und somit $r = \vec{a} \cdot \vec{u}/|\vec{u}|^2$
analoge Berechnung von $s$ und $t$ durch Multiplikation mit $\vec{v}$ und $\vec{u} \quad \rightsquigarrow$

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = s|\vec{v}|^2, \quad \vec{a} \cdot \vec{w} = t|\vec{w}|^2$$

(ii) Formel für die Quadratsumme:

$$|\vec{a}|^2 = (r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w}) \cdot (r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w})$$

Ausmultiplizieren $\quad \rightsquigarrow$

$$|\vec{a}|^2 = r^2|\vec{u}|^2 + s^2|\vec{v}|^2 + t^2|\vec{w}|^2$$

wegen der Orthogonalität der Basisvektoren ( $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \quad \implies \quad (r\vec{u}) \cdot (s\vec{v}) = 0$, $(r\vec{u}) \cdot (t\vec{w}) = 0, \ldots$ )

(iii) Projektionen:

$\vec{a}_u = r\vec{u} \quad \implies$

$$\vec{a}_u \parallel \vec{u}, \quad (\vec{a} - \vec{a}_u) \cdot \vec{u} = (s\vec{v} + t\vec{w}) \cdot \vec{u} = 0$$

analoge Begründung der Projektionseigenschaft von $\vec{a}_v$ und $\vec{a}_w$

## Beispiel

Darstellung des Vektors $\vec{a} = (-4, -2, 5)^{\mathrm{t}}$ bzgl. der orthogonalen Basis

$$\vec{u} = (1, 1, 0)^{\mathrm{t}}, \quad \vec{v} = (1, -1, 1)^{\mathrm{t}}, \quad \vec{w} = (-1, 1, 2)^{\mathrm{t}}$$

$\vec{a} = r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w} \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
r &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -6/2 = -3 \\
s &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big/ 3 = 1 \\
t &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{w}}{|\vec{w}|^2} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Big/ 6 = 2
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Basisdarstellung

$$\begin{aligned}\vec{a} &= -3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-4\\-2\\5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

**Probe**

Test der Identität für die Quadratsummme der Koeffizienten:
Quadrat des Betrags

$$|\vec{a}|^2 = (-4)^2 + (-2)^2 + 5^2 = 45$$

äquivalente Berechnung als Quadratsumme der Koeffizienten

$$r^2|\vec{u}|^2 + s^2|\vec{v}|^2 + t^2|\vec{w}|^2 = 9\cdot 2 + 1\cdot 3 + 4\cdot 6 = 45 \quad \checkmark$$

## Beispiel

Normierung des Vektors $\vec{u} = (3, -4)^{\mathrm{t}}$, Ergänzung zu einer Orthonormalbasis und Bestimmung der Basis-Koeffizienten von $\vec{a} = (2, 1)^{\mathrm{t}}$

(i) Normierung und Basisergänzung:
$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \quad \Longrightarrow$

$$\vec{u}^\circ = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}$$

Basisergänzung durch Komponentenvertauschung und Vorzeichenänderung

$$\vec{v}^\circ = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

$0 \overset{!}{=} \vec{u}^\circ \cdot \vec{v}^\circ = (3/5)(4/5) + (-4/5)(3/5) \quad \checkmark$

(ii) Basis-Darstellung:
vereinfachte Formeln für die Koeffizienten $r$, $s$ der Linearkombination

$$\vec{a} = r\vec{u}^\circ + s\vec{v}^\circ, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}^\circ = \begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}, \vec{v}^\circ = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

aufgrund der Normierung ($|\vec{u}^\circ| = |\vec{v}^\circ| = 1$)

$$\begin{aligned} r &= \vec{a} \cdot \vec{u}^\circ = 2(3/5) + 1(-4/5) = 2/5 \\ s &= \vec{a} \cdot \vec{v}^\circ = 2(4/5) + 1(3/5) = 11/5 \end{aligned}$$

**Probe**

$$\vec{a} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix} + \frac{11}{5}\begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/25 + 44/25 \\ -8/25 + 33/25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$