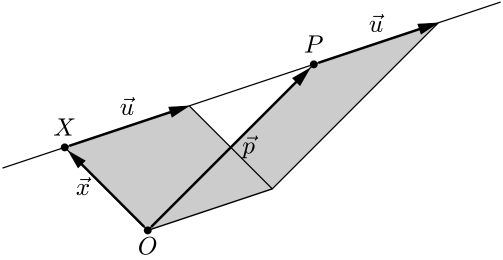
Momentenform einer Geraden im Raum

Die Punkte X auf einer Geraden g durch den Punkt P mit dem Richtungsvektor $\vec{u}$ lassen sich durch

$$\overrightarrow{PX} \times \vec{u} = \vec{0}$$

beschreiben, d.h. für alle Punkte $X \in g$ ist $\overrightarrow{PX}$ parallel zu $\vec{u}$.



Nach Einsetzen von $\overrightarrow{PX} = \vec{x} - \vec{p}$ erhält man für die Ortsvektoren

$$\vec{x} \times \vec{u} = \vec{c}, \quad \vec{c} = \vec{p} \times \vec{u}\,,$$

d.h. eine Übereinstimmung der Flächeninhalte der Parallelogramme, die durch Scherung ineinander übergehen.

Beipiel

Punktprobe ($X \in g$, $Y \in g$?) für die Gerade g durch den Punkt $P = (2, 0, -1)$ mit Richtungsvektor $\vec{u} = (-3, 1, 2)^{\mathrm{t}}$ und $X = (-4, 2, 3)$, $Y = (-3, 2, 4)$

$Z \in g \Leftrightarrow \overrightarrow{PZ} \times \vec{u} = \vec{0}$ bzw. alternativ $Z \in g \Leftrightarrow \exists$ Lösung t des überbestimmten Gleichungssystems $\vec{z} - \vec{p} = t\vec{u}$

(i) Punkt $X = (-3, 1, 2)$:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{PX} \times \vec{u} &= \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot (-3) - (-6) \cdot 2 \\ (-6) \cdot 1 - 2 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow \quad X \in g$

(ii) Punkt $Y = (-3, 2, 4)$:

$$\vec{y} - \vec{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ überbestimmtes Gleichungssystem $\vec{y} - \vec{p} = t\vec{u}$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

zweite Komponente $\implies$ $t = 1/2$
inkonsistent zur ersten Komponente: $-5 \neq (1/2) \cdot (-3)$, d.h. $Y \notin g$