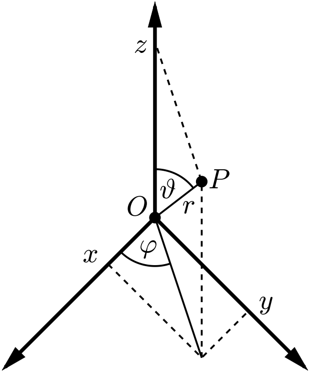
Kugelkoordinaten

Ein Punkt $P = (x, y, z)$ kann durch seinen Abstand $r = |\overline{OP}|$ zum Ursprung, den Winkel $\vartheta \in [0, \pi]$ zwischen $\overline{OP}$ und der z-Achse und den Winkel φ zwischen der x-Achse und der Projektion von $\overline{OP}$ auf die xy-Ebene dargestellt werden.



Der Winkel φ der Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) ist nur bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt. Als Standardbereich wird meist $\varphi \in (-\pi, \pi]$ vereinbart.

Für $x = y = 0$ (Punkt auf der z-Achse) ist φ beliebig und, falls ebenfalls $z = 0$, so auch ϑ. In diesen Fällen kann Null als kanonischer Wert gewählt werden.

Es gilt

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta$$

bzw. für $(x, y) \neq (0, 0)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vartheta = \arccos(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}), \quad \varphi = \arctan(y/x)\,,$$

wobei je nach Vorzeichen von x und y ein geeigneter Zweig des Arcustangens zu wählen ist, d.h. gegebenenfalls $\pm\pi$ zu addieren ist. Mit dem Hauptzweig-Winkel $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ gilt bei Wahl des Standardbereichs für φ

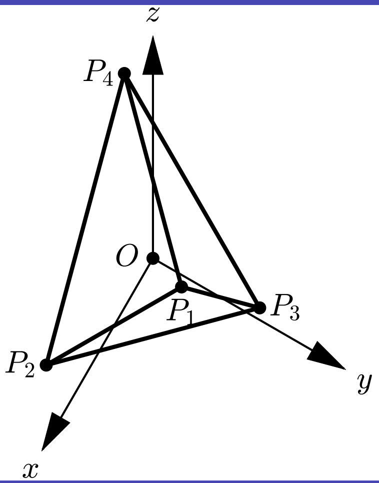
$$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, & \text{für } x > 0, \\ \operatorname{sign}(y)\pi/2, & \text{für } x = 0 \,\wedge\, y \neq 0, \\ \varphi_H + \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y \geq 0, \\ \varphi_H - \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y < 0\,. \end{cases}$$

Beispiel

Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) der Eckpunkte

$$
\begin{array}{ll}
P_1 = (1,1,1), & P_2 = (1,-1,-1), \\
P_3 = (-1,1,-1), & P_4 = (-1,-1,1)
\end{array}
$$

eines regelmäßigen Tetraeders mit Kantenlänge $2\sqrt{2}$ und Schwerpunkt O



- P_1, $(x, y, z) = (1, 1, 1)$:
  (i) $r = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$
  (ii) $\vartheta = \arccos(z/r) = \arccos(1/\sqrt{3}) = 0.9553$
  (iii) Parallelität der Projektion von $\overline{OP}$ auf die xy-Ebene zur ersten Winkelhalbierenden $\quad \Longrightarrow \quad \varphi = \pi/4$
  rechnerisch: $\varphi_H = \arctan(x/y) = \arctan(1/1) = \pi/4$ und da $x = 1 > 0$ ist keine Korrektur (Addition von $\pm\pi$) notwendig, d.h. $\varphi = \varphi_H$

Analoge Berechnungen für die anderen Punkte:

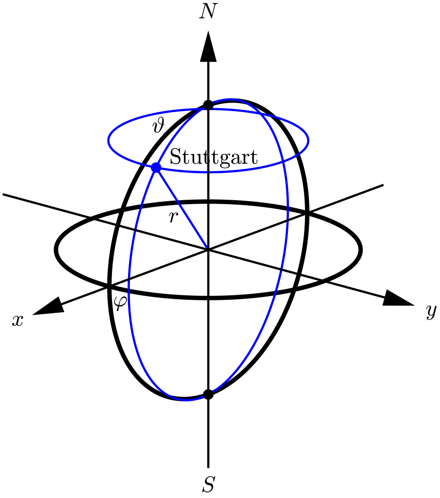
- $P_2 = (1, -1, -1) \to (\sqrt{3}, \pi - \psi, -\pi/4)$
- $P_3 = (-1, 1, -1) \to (\sqrt{3}, \pi - \psi, 3\pi/4)$
- $P_4 = (-1, -1, 1) \to (\sqrt{3}, \psi, -3\pi/4)$

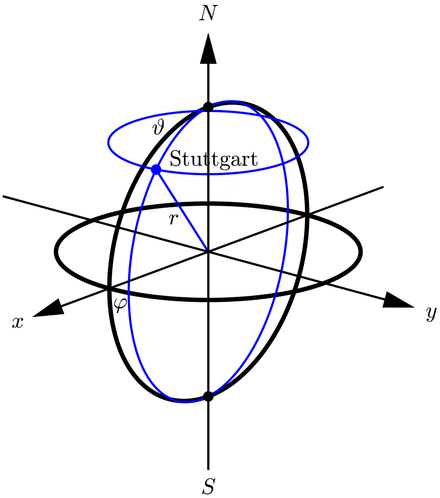
mit $\psi = \arccos(1/\sqrt{3})$
benutzt: $\arccos(-1/\sqrt{3}) = \pi - \psi$ aufgrund der Antisymmetrie des Kosinus bzgl. $\pi/2$

$$\cos(\psi) = -\cos(\pi - \psi)$$

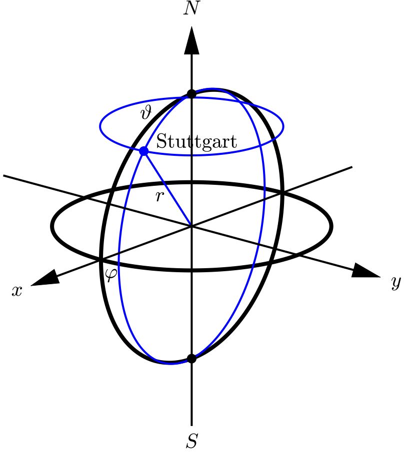
Beispiel

Längen- und Breitengrade auf der Erdkugel: Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) mit anderen Winkelbereichen





östliche Länge	$0^\circ - 180^\circ$	$\varphi = 0 \dots \pi$
westliche Länge	$0^\circ - 180^\circ$	$\varphi = 0 \dots -\pi$
nördliche Breite	$0^\circ - 90^\circ$	$\vartheta = \pi/2 \dots 0$
südliche Breite	$0^\circ - 90^\circ$	$\vartheta = \pi/2 \dots \pi$



Äquator (Breite 0°) und nullter Längenkreis fett
Nordpol: 90° n. Br., Südpol: 90° s. Br.
Längen- und Breitenkreise für Stuttgart: 9° ö. L., 49° n. Br.

$$\varphi = \frac{9}{180}\pi = \frac{1}{20}\pi, \quad \vartheta = \frac{90-49}{180}\pi = \frac{41}{180}\pi$$