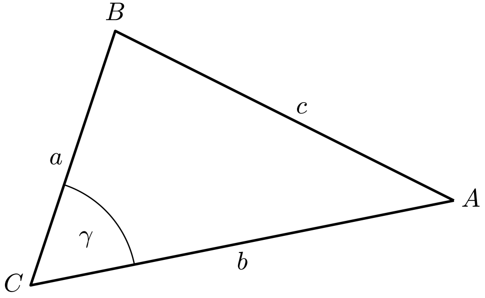
Kosinussatz

In einem Dreieck gilt für die Seitenlängen a, b, c und für den der Seite $\overline{AB}$ gegenüberliegenden Winkel γ

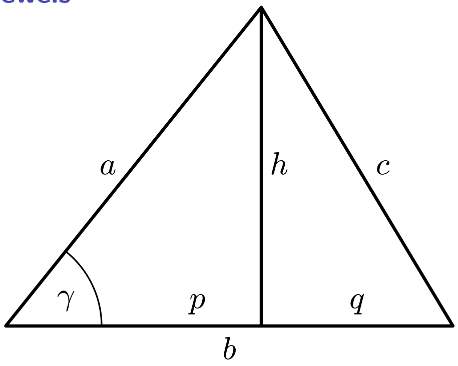
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.$$



Als Spezialfall erhält man für $\gamma = \pi/2$ den Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2\,.$$

Beweis



Satz des Pythagoras $\implies$

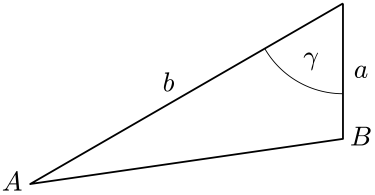
$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + q^2 \\ h^2 &= a^2 - p^2 \end{aligned}$$

Einsetzen von $q = b - p$, $p = a\cos\gamma$ $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} c^2 &= (a^2 - p^2) + (b - p)^2 \\ &= a^2 - p^2 + b^2 - 2b(a\cos\gamma) + p^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$

Beispiel

Bestimmung der dritten Seitenlänge $c = |\overline{AB}|$ und der Winkel α, β eines Dreiecks mit den Seitenlängen $a = 3$, $b = 8$ und dem eingeschlossenen Winkel $\gamma = \pi/3$.



Anwendung des Kosinussatzes

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

(i) Seitenlänge:
Einsetzen von $a = 3$, $b = 8$ und $\cos\gamma = \cos(\pi/3) = 1/2 \quad \rightsquigarrow$

$$c^2 = 9 + 64 - 2 \cdot 24 \cdot (1/2) = 49\,,$$

d.h. $c = 7$

(ii) Winkel:
Kosinussatz für den Winkel α bei A ($c \to a$, $a \to b$, $b \to c$, $\gamma \to \alpha$)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Einsetzen und Auflösen nach $\cos\alpha \quad \rightsquigarrow$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 7^2 - 3^2}{2 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{104}{112} = 0.9286\,,$$

d.h. $\alpha = \arccos(0.9286) = 0.3803$

Winkelsumme $\pi \quad \Longrightarrow$

$$\beta = \pi - \alpha - \gamma = \pi - 0.3803 - \pi/3 = 1.7141$$

Probe

Einsetzen in den Kosinussatz für β

$$0 \stackrel{!}{=} b^2 - (c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta) = 64 - (49 + 9 - 2 \cdot 21 \cdot (-0.1429)) \quad \checkmark$$