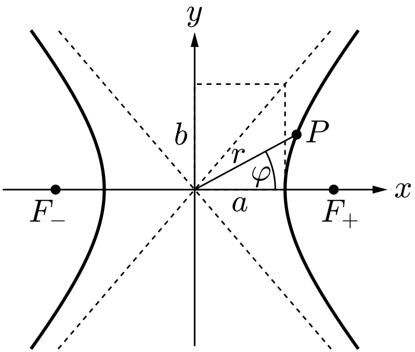
Hyperbel

Für die Punkte $P = (x, y)$ auf einer Hyperbel ist die Differenz der Abstände zu zwei Brennpunkten $F_\pm$ konstant:

$$\left| |\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| \right| = 2a$$

mit $2a < |\overrightarrow{F_-F_+}|$.



Ist $F_\pm = (\pm f, 0)$, so gilt für die Koordinaten

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2\,,$$

und

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

für die Polarkoordinaten der Punkte P. Die Asymptoten haben die Steigung $\pm b/a$.

Parametrisierungen der Hyperbeläste sind

$$x = \pm a \cosh t, \quad y = b \sinh t$$

mit $t \in \mathbb{R}$.

Beweis

(i) Äquivalenz der Darstellungen:

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a \quad \overset{!}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2$$

Quadrieren von

$$|\overrightarrow{PF_-}| \mp 2a = \underbrace{\sqrt{(x+f)^2 + y^2} \mp 2a}_{>0} = \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = |\overrightarrow{PF_+}|$$

und Vereinfachung $\quad \rightsquigarrow \quad$ äquivalente Identität zur linken Gleichung:

$$4a^2 + 4xf = \pm 4a\sqrt{(x+f)^2 + y^2}$$

erneutes Quadrieren und Division durch $(4a)^2 \quad \rightsquigarrow$

$$a^2 + 2xf + \frac{f^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2xf + f^2 + y^2$$

Substitution von $f^2 = a^2 + b^2$ und Division durch $b^2 \quad \rightsquigarrow$ Koordinatenform

(ii) Polarform:

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

Multiplikation mit dem Nenner unter Berücksichtigung von

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad f^2 = a^2 + b^2, \quad x = r \cos \varphi$$

$\rightsquigarrow$

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2 + b^2}{a^2} x^2 = -b^2$$

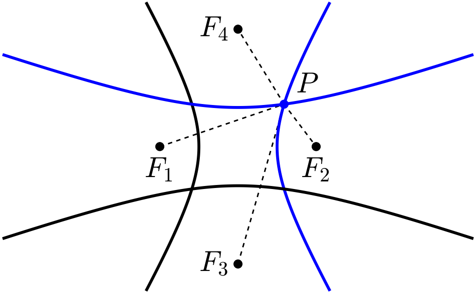
Division durch $-b^2$ $\quad \rightsquigarrow \quad$ Koordinatenform

Beispiel

Positionsbestimmung durch Zeitdifferenzen $2a_{j,k}$ synchroner Radiosignale von Sendestationen F_i

Position P: Schnittpunkt von Hyperbeln

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PF_1}| - |\overrightarrow{PF_2}| &= 2a_{1,2} \\ |\overrightarrow{PF_3}| - |\overrightarrow{PF_4}| &= 2a_{3,4} \end{aligned}$$



konkrete Daten

$$F_1 = (-2, 0),\ F_2 = (2, 0), \quad F_3 = (0, -3),\ F_4 = (0, 3)$$

sowie $a_{1,2} = a_{3,4} = 1$

$\rightsquigarrow$ Hyperbelgleichungen

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1, \quad y^2 - \frac{x^2}{8} = 1$$

($f^2 = a^2 + b^2$ mit $a = 1$ und $f = 2$ bzw. $f = 3 \quad \rightsquigarrow \quad b = \sqrt{3}$ bzw. $b = \sqrt{8}$)
Lösen des linearen Gleichungssystems für x^2 und $y^2 \quad \rightsquigarrow$

$$x^2 = \frac{32}{23}, \quad y^2 = \frac{27}{23}$$

Lösung auf dem Schnittpunkt des zu F_2 bzw. F_4 nächsten Hyperbelasts ($a_{1,2} > 0 \implies |\overrightarrow{PF_1}| > |\overrightarrow{PF_2}|$, $a_{3,4} > 0 \implies |\overrightarrow{PF_3}| > |\overrightarrow{PF_4}|$)

$$P = (x, y) = (\sqrt{32/23}, \sqrt{27/23})$$