Hesse-Normalform einer Ebene

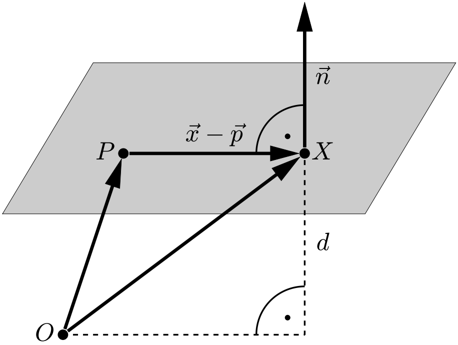
Der Ortsvektor $\vec{x}$ eines Punktes X auf einer Ebene E durch einen Punkt P orthogonal zu einem Normalenvektor $\vec{n}$ erfüllt

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = d, \quad d = \vec{p} \cdot \vec{n}$$

bzw.

$$X \in E \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0\,,$$

d.h. $(\vec{x} - \vec{p}) \perp \vec{n}$.



Bei der Normalform wird $\vec{n}$ normiert und d nicht-negativ gewählt. Dies lässt sich durch Division der Ebenengleichung durch $|\vec{n}|/\sigma$ mit $\sigma \in \{0, 1\}$ erreichen. Für $O \notin E$ zeigt dann der Normalenvektor $\sigma\vec{n}/|\vec{n}|$ vom Ursprung in Richtung der Ebene und d ist der Abstand der Ebene zum Ursprung.

Beweis

Berechnung des Abstands vom Ursprung für eine Ebene in Hesse-Normalform,

$$E:\ \vec{x}\cdot(\sigma\vec{n}^\circ) = d \geq 0$$

(i) $O \in E$:
$\implies \quad d = \vec{0}\cdot(\sigma\vec{n}^\circ) = 0$ und die Richtung von $\vec{n}$ ist irrelevant

(ii) $O \notin E$:
wähle $X \in E$ als nächsten Punkt zum Ursprung
$\implies \quad \vec{x} \parallel \sigma\vec{n}^\circ$ und $\vec{x}$ zeigt von O in Richtung E
$\vec{x}\cdot(\sigma\vec{n}^\circ) > 0 \quad \implies \quad \vec{x}$ und $\sigma\vec{n}^\circ$ haben die gleiche Richtung, d.h. $\vec{x}^\circ = \sigma\vec{n}^\circ$ und der Abstand ist

$$|\vec{x}| = \vec{x}\cdot\vec{x}^\circ = \vec{x}\cdot(\sigma\vec{n}^\circ) = d$$

Beispiel

Hesse-Normalform der Ebene E durch den Punkt $P=(-3,-1,1)$ mit Normalenvektor $\vec{n}=(2,1,-2)^\mathrm{t}$, Abstand vom Ursprung und Lage von Punkten

(i) Hesse-Normalform:
Einsetzen in die Ebenengleichung $E:\ \vec{x}\cdot\vec{n}=\vec{p}\cdot\vec{n} \quad \rightsquigarrow$

$$\vec{x}\cdot\vec{n}=\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=2x_1+x_2-2x_3,\quad \vec{p}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=-9\,,$$

d.h.

$$E:\ 2x_1+x_2-2x_3=-9$$

Betrag des Normalenvektors (bzw. Koeffizientenvektors) $\vec{n}$:
$|(2,1,-2)^\mathrm{t}|=\sqrt{4+1+4}=3 \quad \rightsquigarrow \quad$ Normierung durch Division durch $|\vec{n}|=3$
rechte Seite negativ $\quad \rightsquigarrow \quad$ Vorzeichenänderung, d.h. $\sigma=-1$

$\rightsquigarrow$ Hesse-Normalform $E: \vec{x} \cdot (\sigma \vec{n}^\circ) = d$ mit

$$\sigma \vec{n}^\circ = \sigma \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \quad d = \sigma \vec{p} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = (-1)(-9)/3 = 3$$

bzw. (Division der Ebenengleichung durch $|\vec{n}|/\sigma = -3$)

$$E: -(2/3)x_1 - (1/3)x_2 + (2/3)x_3 = 3$$

(ii) Abstand zum Ursprung:
ablesbar aus der Hesse-Normalform: $d = 3$

am nächsten zum Ursprung gelegener Punkt P

$$\vec{p} = d\,(\sigma \vec{n}^\circ) = 3 \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(iii) Lage von Punkten:

- $X = (-5, 1, 0)$: Einsetzen in die linke Seite $\vec{x} \cdot (\sigma \vec{n}^\circ)$ der Hesse-Normalform $E: -(2/3)x_1 - (1/3)x_2 + (2/3)x_3 = 3 \quad \rightsquigarrow$

  $$(-2/3)(-5) + (-1/3)(1) + (2/3)(0) = 3$$

  Vergleich mit der rechten Seite $d = 3 \quad \Longrightarrow \quad X \in E$
- $X = (0, -1, 5)$:

  $$(-2/3)(0) + (-1/3)(-1) + (2/3)(5) = 11/3$$

  $11/3 > d = 3 \quad \Longrightarrow \quad X \notin E$, X liegt auf der anderen Seite von E als der Ursprung
- $X = (5, 0, 1)$:

  $$(-2/3)(5) + (-1/3)(0) + (2/3)(1) = -8/3$$

  $-8/3 < d = 3 \quad \Longrightarrow \quad X \notin E$, X liegt auf derselben Seite von E wie der Ursprung

Beispiel

Hesse-Normalform der Ebene durch die Punkte $P = (0, 2, 1)$, $Q = (-2, 0, 2)$, $R = (-1, -1, 0)$.

(i) Bestimmung der Ebenengleichung $\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{p} \cdot \vec{n}$:

- Bestimmung von zwei Vektoren, die die Ebene aufspannen:

$$\vec{u} = \vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 0-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \vec{r} - \vec{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Konstruktion eines Normalenvektors:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)(-1) - (1)(-3) \\ (1)(-1) - (-2)(-1) \\ (-2)(-3) - (-2)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Rechte Seite der Ebenengleichung:

$$\vec{p} \cdot \vec{n} = (0, 2, 1)^{\mathrm{t}} \cdot (5, -3, 4)^{\mathrm{t}} = 0 - 6 + 4 = -2$$

$\leadsto$ Ebenengleichung $E: \; 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -2$

(ii) Skalierung:

- Betrag des Normalenvektors:

$$|\vec{n}| = |(5,-3,4)^t| = \sqrt{25+9+16} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\implies \quad \vec{n}^\circ = (5,-3,4)^t/(5\sqrt{2})$$

- Vorzeichenkorrektur, da rechte Seite negativ $\quad \implies \quad \sigma = -1$

Division der Ebenengleichung durch $|\vec{n}|/\sigma = -5\sqrt{2} \quad \rightsquigarrow$
Hesse-Normalform $E:\ \vec{x}\cdot(\sigma\vec{n}^\circ) = \vec{p}\cdot(\sigma\vec{n}^\circ)$, d.h.

$$E:\ -\frac{5}{5\sqrt{2}}x_1 + \frac{3}{5\sqrt{2}}x_2 - \frac{4}{5\sqrt{2}}x_3 = \frac{2}{5\sqrt{2}}$$

bzw. nach Rationalisieren der Nenner

$$E:\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{3\sqrt{2}}{10}x_2 - \frac{2\sqrt{2}}{5}x_3 = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

Alternative Methode

Verwendung der Darstellung

$$x_1 \begin{vmatrix} p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_3 & q_3 & r_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}$$

Einsetzen $\quad \rightsquigarrow$

$$x_1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Berechnung der Determinanten mit der Sarrus-Regel, z.B.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 0 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 0 - 0 - (-1) \cdot 2 \cdot 1 = 5$$

$\rightsquigarrow$

$$E:\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -2$$

anschließende Skalierung auf Hesse-Normalform wie in (ii)

Beispiel

Parameterdarstellung mit orthonormalen Richtungsvektoren für die Ebene

$$E:\ \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 6$$

Ebenengleichung ist in Hesse-Normalform, denn der Koeffizientenvektor $\vec{n}$ ist normiert,

$$|\vec{n}| = |(2/3, -2/3, 1/3)^{\mathrm{t}}| = \sqrt{4/9 + 4/9 + 1/9} = 1$$

und die rechte Seite $d = 6$ (Abstand vom Ursprung) ist nicht-negativ

Konstruktion einer Parameterdarstellung

$$E:\ \vec{x} = \vec{p} + s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

- Kanonische Wahl für $\vec{p}$:
  Ortsvektor des Punkts kürzesten Abstands vom Ursprung, d.h.,

$$\vec{p} = d\vec{n} = 6 \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

  alternativ (anderer Ortsvektor): zwei Komponenten null setzen und in die Ebenengleichung einsetzen, z.B.

$$p_2 = p_3 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{2}{3}p_1 = 6, \text{ d.h. } p_1 = 9$$

- Erster Richtungsvektor:
  beliebige Wahl einer zu $\vec{n}$ orthogonalen Richtung $\vec{u}$, z.B. durch 0/1-Vorgabe von zwei Komponenten:

$$u_2 = 1,\ u_3 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad 0 \stackrel{!}{=} \vec{n} \cdot \vec{u} = \frac{2}{3}u_1 - \frac{2}{3} \cdot 1 + 0, \text{ d.h. } u_1 = 1$$

  und nach Normierung

$$\vec{u}^\circ = (1, 1, 0)^\mathrm{t}/\sqrt{2}$$

- Zweiter Richtungsvektor:
  Bilden des Vektorprodukts mit dem Normalenvektor $\rightsquigarrow$ zweite Ebenenrichtung $\vec{v}$, orthogonal zu $\vec{u}^\circ$ und $\vec{n}$:

$$\vec{v}^\circ = \vec{n} \times \vec{u}^\circ = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

  bereits normiert, da $|\vec{n} \times \vec{u}^\circ| = |\vec{n}|\,|\vec{u}^\circ| \sin\sphericalangle(\vec{n}, \vec{u}^\circ) = 1$ wegen der Normierung und Orthogonalität von $\vec{n}$ und $\vec{u}^\circ$

mögliche Parameterdarstellung

$$E: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big/ \sqrt{2} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Big/ (3\sqrt{2})$$

Beispiel

Schnittpunkt der Gerade $g: \vec{x} = (5,6,3)^{\mathrm{t}} + t(1,4,2)^{\mathrm{t}}$ mit der Ebene

$$E:\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4$$

Einsetzen der Parametrisierung der Gerade,

$$(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{t}} = (5,6,3)^{\mathrm{t}} + t(1,4,2)^{\mathrm{t}} = (5+t, 6+4t, 3+2t)^{\mathrm{t}}\,,$$

in die Ebenengleichung $\rightsquigarrow$

$$(5+t) - 2(6+4t) + 3(3+2t) = 4 \qquad \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Vereinfachung}} \qquad 2 - t = 4$$

Einsetzen der Lösung $t = -2$ in die Parametrisierung der Gerade $\rightsquigarrow$ Ortsvektor des Schnittpunkts X

$$\vec{x} = (5,6,3)^{\mathrm{t}} + (-2)(1,4,2)^{\mathrm{t}} = (3,-2,-1)^{\mathrm{t}}$$