Epsilon-Tensor

Der Epsilon-Tensor

$$\varepsilon_{i,j,k} \in \{-1, 0, 1\}, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\}\,,$$

ist Null bei zwei gleichen Indizes und hat für paarweise verschiedene Indizes die Werte

$$\begin{array}{ccccccc} \varepsilon_{1,2,3} & = & \varepsilon_{2,3,1} & = & \varepsilon_{3,1,2} & = & 1\,, \\ \varepsilon_{1,3,2} & = & \varepsilon_{2,1,3} & = & \varepsilon_{3,2,1} & = & -1\,. \end{array}$$

Er ist also invariant unter zyklischer Permutation und ändert bei Vertauschung von Indizes das Vorzeichen.

Beispiel

Darstellung des Vektorproduktes mit Hilfe des Epsilon-Tensors

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad c_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_j b_k$$

Überprüfung der ersten Komponente c_1 $(i = 1)$:
nur 2 Summanden, da $\varepsilon_{1,j,k} = 0$ für $j = 1$, $k = 1$ oder $j = k$, d.h.

$$c_1 = \underbrace{\varepsilon_{1,2,3}}_{1} a_2 b_3 + \underbrace{\varepsilon_{1,3,2}}_{-1} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \quad \checkmark$$

Überprüfung von c_2, c_3 analog