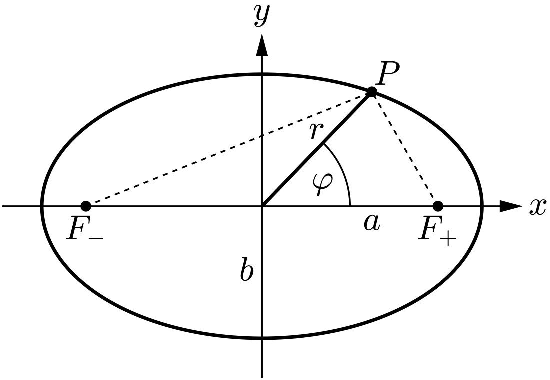
Ellipse

Für die Punkte $P = (x, y)$ auf einer Ellipse ist die Summe der Abstände zu zwei Brennpunkten $F_\pm$ konstant:

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a$$

mit $2a > |\overrightarrow{F_-F_+}|$.



Ist $F_{\pm} = (\pm f, 0)$, so gilt für die kartesischen Koordinaten

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2\,,$$

und

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

für die Polarkoordinaten der Punkte P.
Eine Parametrisierung der Ellipse ist

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

mit $t \in [0, 2\pi)$.

Beweis

(i) Äquivalenz der Darstellungen:

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a \quad \overset{!}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2$$

Quadrieren von

$$2a - |\overrightarrow{PF_-}| = \underbrace{2a - \sqrt{(x+f)^2 + y^2}}_{>0} = \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = |\overrightarrow{PF_+}|$$

und Vereinfachung $\quad\rightsquigarrow\quad$ äquivalente Form der linken Gleichung

$$\underbrace{4a^2 + 4xf}_{>0} = 4a\sqrt{(x+f)^2 + y^2}$$

erneutes Quadrieren und Division durch $(4a)^2 \quad\rightsquigarrow$

$$a^2 + 2xf + \frac{f^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2xf + f^2 + y^2$$

Substitution von $f^2 = a^2 - b^2$, Division durch $b^2 \quad\rightsquigarrow\quad$ Koordinatenform

(ii) Polarform:

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

Multiplikation mit dem Nenner und Substitution von

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad f^2 = a^2 - b^2, \quad r^2 \cos^2(\varphi) = x^2$$

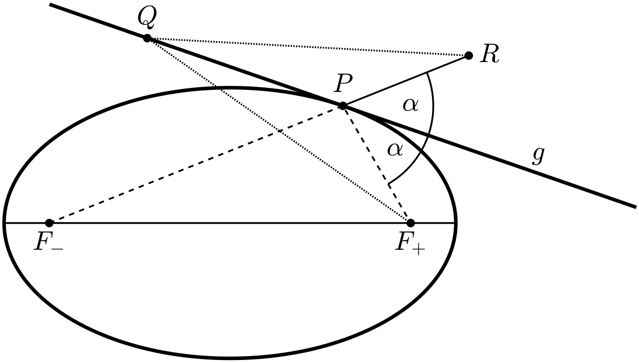
$\rightsquigarrow$

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 = b^2$$

Koordinatenform nach Division durch b^2

Beispiel

Reflektion von Brennpunktstrahlen: Ein von einem Brennpunkt ausgehender Strahl wird von der Ellipse in den anderen Brennpunkt reflektiert; die Strecken $\overline{F_+P}$ und $\overline{PF_-}$ bilden mit der Tangente im Punkt P den gleichen Winkel.



Herleitung der Reflektionseigenschaft:
Hilfspunkt $Q \neq P$ auf der Tangente g außerhalb der Ellipse $\Longrightarrow$

$$2a = |\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QF_+}|$$

Ersetzen von $\overline{PF_+}$ durch das Spiegelbild $\overline{PR}$ an g $\leadsto$ $|\overrightarrow{PF_+}| = |\overrightarrow{PR}|$ und $|\overrightarrow{QF_+}| = |\overrightarrow{QR}|$, da ebenfalls $\overline{QR}$ Spiegelbild von $\overline{QF_+}$ ist
Einsetzen in die Ungleichung $\leadsto$

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PR}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QR}| \quad \forall Q \in g$$

$\Longrightarrow$ F_-, P, R kollinear, bzw. $\sphericalangle(F_-PQ) = \alpha$ (gleiche Winkel der Brennpunktstrahlen mit der Tangente)