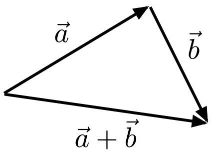
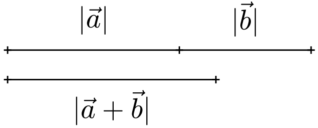
Dreiecksungleichung

Der Betrag der Summe zweier Vektoren lässt sich durch die Summe ihrer Beträge abschätzen:

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

mit Gleichheit genau dann wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die gleiche Richtung haben, d.h. $\vec{a} = s\vec{b}$ mit $s > 0$ oder (im trivialen Fall) wenn mindestens einer der Vektoren der Nullvektor ist.





Beweis

mehrere Alternativen

(i) Geometrisches Argument:
Jede Seite des (nicht entarteten) Dreiecks, das von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$ gebildet wird, ist kürzer als die Summe der Längen der beiden anderen Seiten.

(ii) Anwendung der Ungleichung von Cauchy-Schwarz:
CS: $\quad |\vec{u}\cdot\vec{v}| \le |\vec{u}|\,|\vec{v}| \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} |\vec{a}+\vec{b}|^2 &= (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) \\ &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &\underset{CS}{\le} |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}|\,|\vec{b}| + |\vec{b}|^2 \\ &= (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 \end{aligned}$$

Gleichheit $\quad\Leftrightarrow\quad$ Gleichheit in CS und $\vec{a}\cdot\vec{b} \ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad$ gleiche Richtung von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ oder mindestens ein Nullvektor

(iii) Anwendung des Satzes von Pythagoras:
P: $\quad \vec{u} \perp \vec{v} \quad \implies \quad |\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$
[Beweis durch Ausmultiplizieren von $(\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}+\vec{v})$]
im nicht trivialen Fall $\vec{a} \neq \vec{0}$ Darstellung von $\vec{b}$ in der Form

$$\vec{b} = s\vec{a} + \vec{c}, \quad \vec{c} \perp \vec{a}$$

[Wert von s irrelevant, Berechnung aus der Bedingung
$0 = \vec{c} \cdot \vec{a} = (\vec{b} - s\vec{a}) \cdot \vec{a} = 0$ möglich]
Einsetzen in die quadrierte linke Seite der Dreiecksungleichung $\quad \rightsquigarrow$

$$|(\vec{a}+s\vec{a}) + \vec{c}|^2 \underset{P}{=} |(1+s)\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 = (1+s)^2|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2$$

Vergleich mit der quadrierten rechten Seite der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} (|\vec{a}|^2 + |s\vec{a}+\vec{c}|)^2 &= |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}|\,|s\vec{a}+\vec{c}| + |s\vec{a}+\vec{c}|^2 \\ &\underset{P}{=} |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}|\sqrt{s^2|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2} + s^2|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 \end{aligned}$$

und Weglassen der identischen Terme $|\vec{a}|^2$, $s^2|\vec{a}|^2$, $|\vec{c}|^2$ $\rightsquigarrow$ zur Dreiecksungleichung äquivalente Ungleichung

$$2s|\vec{a}|^2 \leq 2|\vec{a}|\sqrt{s^2|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2}$$

erfüllt, da $s|\vec{a}| \leq \sqrt{s^2|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2}$
Gleichheit genau dann, wenn $\vec{c} = \vec{0}$ und $s \geq 0$, d.h. wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren mit gleicher Richtung sind ($s > 0$) oder $\vec{b} = \vec{0}$ ($s = 0$)

Beispiel

Illustration der Dreiecksungleichung

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + \vec{b}|$$

für die Vektoren

$$\vec{a} = (1, 8, 4)^{\mathrm{t}}, \quad \vec{b} = (2, -2, 1)^{\mathrm{t}}$$

Linke Seite

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (1+2, 8-2, 4+1)^{\mathrm{t}} = (3, 6, 5)^{\mathrm{t}} \\ |\vec{a} + \vec{b}| &= \sqrt{3^2 + 6^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 36 + 25} = \sqrt{70} \end{aligned}$$

Rechte Seite

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{1^2 + 8^2 + 4^2} = \sqrt{81} = 9 \\ |\vec{b}| &= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

Vergleich: $\sqrt{70} < 9 + 3 \quad \checkmark$