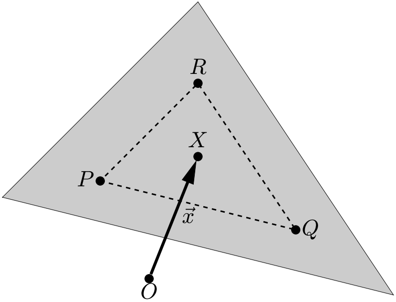
Drei-Punkte-Form einer Ebene

Eine Ebene E kann durch drei Punkte P, Q, R, die ein echtes Dreieck bilden, festgelegt werden. Es gilt dann für die Ortsvektoren der Punkte X



$$x \in E \quad \Leftrightarrow \quad [\vec{q}-\vec{p}, \vec{r}-\vec{p}, \vec{x}-\vec{p}] = 0\,.$$

Das Spatprodukt lässt sich auch als Determinante schreiben, und man erhält das Kriterium

$$X \in E \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} \vec{p} & \vec{q} & \vec{r} & \vec{x} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & x_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & x_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Entwickeln der Determinante nach der letzten Spalte führt auf die folgende explizite Form der Ebenengleichung

$$x_1 \begin{vmatrix} p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_3 & q_3 & r_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} .$$

Die 3×3-Determinanten können mit der Sarrus-Regel berechnet werden. Beispielsweise ist der Faktor von x_1 gleich

$$p_2 q_3 + q_2 r_3 + r_2 p_3 - p_2 r_3 - q_2 p_3 - r_2 q_3 .$$

Schließlich erhält man durch Anwendung der Regeln für Spatprodukte und Determinanten eine Reihe äquivalenter Kriterien, z.B.

$$X \in E \quad \Leftrightarrow \quad [\vec{p} - \vec{x}, \vec{q} - \vec{x}, \vec{r} - \vec{x}] = 0 .$$

Dabei können $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ beliebig vertauscht werden.

Beweis

(i) Geometrische Interpretation:
$\vec{q}-\vec{p} \nparallel \vec{r}-\vec{p}$ (echtes Dreieck) $\quad \Longrightarrow$

$[\vec{q}-\vec{p}, \vec{r}-\vec{p}, \vec{x}-\vec{p}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x}-\vec{p}$ liegt in der Ebene des Dreiecks, d.h. $X \in E$

(ii) Äquivalenz der Kriterien:
Invarianz von Determinanten bei Subtraktion von Spalten $\quad \Longrightarrow$

$$\begin{vmatrix} \vec{p} & \vec{q} & \vec{r} & \vec{x} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{p} & \vec{q}-\vec{p} & \vec{r}-\vec{p} & \vec{x}-\vec{p} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Die erste Spalte wurde von den anderen Spalten abgezogen.

Entwickeln der Determinante nach der letzten Zeile (nur ein Term wegen der Nullen) $\quad \rightsquigarrow$

$$(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} \vec{q}-\vec{p} & \vec{r}-\vec{p} & \vec{x}-\vec{p} \end{vmatrix} = -[\vec{q}-\vec{p}, \vec{r}-\vec{p}, \vec{x}-\vec{p}]$$

aufgrund der Darstellung des Spatprodukts als Determinante

Das Vorzeichen des Spatprodukts ist bei dem Kriterium $[\ldots] = 0$ irrelevant.

(iii) Umformung des Spatprodukts:
Linearität des Spatprodukts bzgl. jedes Arguments $\Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
&[\vec{p}-\vec{x},\vec{q}-\vec{x},\vec{r}-\vec{x}] = \\
&\qquad [\vec{p},\vec{q},\vec{r}] - [\vec{p},\vec{q},\vec{x}] - [\vec{p},\vec{x},\vec{r}] + [\vec{p},\vec{x},\vec{x}] - \\
&\qquad [\vec{x},\vec{q},\vec{r}] + [\vec{x},\vec{q},\vec{x}] + [\vec{x},\vec{x},\vec{r}] - [\vec{x},\vec{x},\vec{x}]\,,
\end{aligned}
$$

analog zum Ausmultiplizieren eines Produktes $(a+b)(c+d)(e+f)$

Verschwinden des Spatprodukts bei zwei gleichen Argumenten sowie Vorzeichenänderung bei Vertauschung und Invarianz unter zyklischer Permutation von Argumenten $\rightsquigarrow$ Vereinfachung

$$
\begin{aligned}
&[\vec{p},\vec{q},\vec{r}] + [\vec{x},\vec{q},\vec{p}] + [\vec{x},\vec{p},\vec{r}] - [\vec{x},\vec{q},\vec{r}] = \\
&\qquad [\vec{q},\vec{r},\vec{p}] + [\vec{q},\vec{p},\vec{x}] + [\vec{p},\vec{r},\vec{x}] - [\vec{q},\vec{r},\vec{x}]
\end{aligned}
$$

bis auf das andere Vorzeichen (irrelevant für das Kriterium $[\ldots]=0$) gleiche Terme wie beim Ausmultiplizieren von $[\vec{q}-\vec{p},\vec{r}-\vec{p},\vec{x}-\vec{p}]$

Beispiel

Punktproben für die Ebene E durch $P = (1, 2, 3)$, $Q = (3, 2, 3)$, $R = (2, 3, 4)$ sowie Aufstellen der Ebenengleichung

Testen von $X \in E$ mit den beiden äquivalenten Kriterien
(i) Spatprodukt-Kriterium für $X = (1, 1, 2)$:
$X \in E \quad \Leftrightarrow \quad [\vec{q} - \vec{p}, \vec{r} - \vec{p}, \vec{x} - \vec{p}] = 0$
Einsetzen und die Definition des Spatprodukts $\quad \leadsto$

$$\left[\begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-2 \\ 3-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-2 \\ 4-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-2 \\ 2-3 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ ? \\ ? \end{pmatrix} = 0$$

$\Longrightarrow \quad X \in E$
(Die Einträge „?“ brauchen nicht berechnet zu werden.)

(ii) Determinanten-Kriterium für $X = (2, 0, 0)$:

$$X \in E \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} \vec{p} & \vec{q} & \vec{r} & \vec{x} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Einsetzen und Entwickeln nach der letzten Spalte $\quad \rightsquigarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} \cdot 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

erste Determinante null wegen zwei gleicher Spalten

Berechnung der zweiten Determinante mit dem Sarrus-Schema $\quad \rightsquigarrow$

$$0 + (8 + 27 + 12 - 9 - 24 - 12) = 2 \neq 0$$

$$\Longrightarrow \quad X \notin E$$

(iii) Ebenengleichung:

$$X \in E \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \begin{vmatrix} \vec{p} & \vec{q} & \vec{r} & \vec{x} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Einsetzen und Entwickeln nach der letzten Spalte $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & x_1 \\ 2 & 2 & 3 & x_2 \\ 3 & 3 & 4 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -x_1 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - x_3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2x_2 - 2x_3 + 2\,, \end{aligned}$$

d.h.

$$E:\; x_3 - x_2 = 1$$