## Berechnung von Koordinaten mit Hilfe des Spatprodukts

Spannen die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ein echtes Spat auf ($[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] \neq 0$), so lässt sich ein beliebiger Vektor $\vec{x}$ als Linearkombination

$$\vec{x} = r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w}$$

darstellen mit den Koeffizienten

$$r = \frac{[\vec{x},\vec{v},\vec{w}]}{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]} = \frac{\vec{x}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})}{\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})}, \quad s = \frac{[\vec{u},\vec{x},\vec{w}]}{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]}, \quad t = \frac{[\vec{u},\vec{v},\vec{x}]}{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]}\,.$$

## Beweis

$$\vec{x} = r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w}$$

Skalarprodukt mit $\vec{v} \times \vec{w} \quad \leadsto$

$$\vec{x} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = r\, \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

denn $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0 = \vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$
$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0 \quad \implies$

$$r = \frac{[\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]}$$

analoge Berechnung von $s$ und $t$, z.B.

$$\vec{x} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) = (s\vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) \quad \implies \quad s = \frac{[\vec{x}, \vec{u}, \vec{w}]}{[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]} = \frac{[\vec{u}, \vec{x}, \vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]},$$

da sich bei Vertauschung von Vektoren das Vorzeichen des Spatprodukts ändert

## Beispiel

Darstellung des Vektors $\vec{x} = (-2, 8, 2)^{\mathrm{t}}$ als Linearkombination der Basisvektoren

$$\vec{u} = (2, 0, 2)^{\mathrm{t}},\ \vec{v} = (1, 1, 1)^{\mathrm{t}},\ \vec{w} = (0, 1, 1)^{\mathrm{t}}$$

Spatprodukte

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$[\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -6$$

analog

$$[\vec{u}, \vec{x}, \vec{w}] = 8, \quad [\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}] = 8$$

$\rightsquigarrow$ Linearkombination

$$\vec{x} = r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w}$$

mit den Koeffizienten

$$r = \frac{[\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]} = -\frac{6}{2} = -3,\; s = \frac{[\vec{u}, \vec{x}, \vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]} = \frac{8}{2} = 4,\; t = \frac{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]} = \frac{8}{2} = 4$$

**Probe**

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} -3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \checkmark \end{aligned}$$