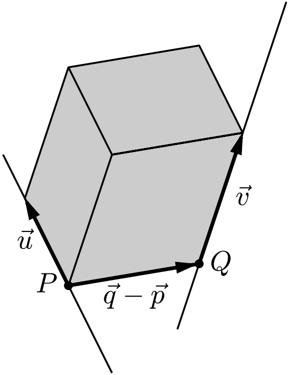
Die durch die Punkte P, Q und Richtungen $\vec{u}$, $\vec{v}$ gegebenen, nicht parallele Geraden im Raum mit den Parametrisierungen

$$\begin{array}{rcl} g: \quad \vec{x} & = & \vec{p} + s\vec{u}, \\ h: \quad \vec{y} & = & \vec{q} + t\vec{v} \end{array}$$

($s, t \in \mathbb{R}$) haben den Abstand

$$d = \frac{\left|[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]\right|}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|} = \frac{\left|(\vec{p} - \vec{q}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})\right|}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|}\,.$$



Ist das Spatprodukt $[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]$ null, so schneiden sich die Geraden.

Die Punkte X, Y kürzesten Abstands erhält man nach Einsetzen der Parametrisierungen in die Orthogonalitätsbedingungen

$$\vec{y} - \vec{x} \perp \vec{u}, \quad \vec{y} - \vec{x} \perp \vec{v}$$

durch Lösen des resultierenden linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} (\vec{u} \cdot \vec{u})s - (\vec{v} \cdot \vec{u})t &= (\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u} \\ (\vec{u} \cdot \vec{v})s - (\vec{v} \cdot \vec{v})t &= (\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{v}, \end{aligned}$$

für die Parameter s, t.

Für parallele Geraden gilt

$$d = \left|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}\right| / \left|\vec{u}\right| .$$

Man bezeichnet zwei Geraden als windschief, wenn sie nicht parallel sind und einen positiven Abstand haben.

Beweis

(i) Nicht parallele Geraden ($\vec{u} \neq \lambda \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$):

Ortsvektoren der Punkte kürzesten Abstands und Differenzvektor

$$\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u},\ \vec{y} = \vec{q} + t\vec{v}, \quad \overrightarrow{XY} = (\vec{q} - \vec{p}) + t\vec{v} - s\vec{u}$$

Orthogonalität von $\overrightarrow{XY}$ zu den Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ $\implies$

$$\overrightarrow{XY} \quad \| \quad \vec{c} = \vec{u} \times \vec{v}$$

Berechnung von $|\overrightarrow{XY}|$ als Betrag des Skalarproduktes mit dem parallelen Einheitsvektor $\vec{c}/|\vec{c}|$ $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} d &= |\overrightarrow{XY}| = |((\vec{q} - \vec{p}) + t\vec{v} - s\vec{u}) \cdot (\vec{c}/|\vec{c}|)| = |\underbrace{(\vec{q} - \vec{p})}_{\overrightarrow{PQ}} \cdot (\vec{c}/|\vec{c}|)| \\ &= |\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|/|\vec{u} \times \vec{v}| = |[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]|/|\vec{u} \times \vec{v}|\,, \end{aligned}$$

da $\vec{c} \perp \vec{u}$, $\vec{c} \perp \vec{v}$ $\implies$ $\vec{u} \cdot \vec{c} = 0$, $\vec{v} \cdot \vec{c} = 0$ und nach Definition des Spatprodukts

Einsetzen von

$$\overrightarrow{XY} = (\vec{q} + t\vec{v}) - (\vec{p} + s\vec{u})$$

in die Orthogonalitätsbedingung $\overrightarrow{XY} \cdot \vec{u} = 0 \quad \rightsquigarrow$

$$(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u} + t\vec{v} \cdot \vec{u} - s\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$$

Umformung $\quad \rightsquigarrow \quad$ erste Gleichung des linearen Gleichungssystems für s, t

analog: $\overrightarrow{XY} \cdot \vec{v} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad$ zweite Gleichung

(ii) Parallele Geraden ($\vec{u} = \lambda\vec{v}$):
$d = |\vec{y} - \vec{x}|$ mit

$$\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u}, \quad \vec{y} = \vec{q} + t\vec{v}$$

den Ortsvektoren von Punkten kürzesten Abstandes
$(\vec{y} - \vec{x}) \perp \vec{u} \quad \Longrightarrow$

$$|(\vec{y} - \vec{x}) \times \vec{u}| = |\vec{y} - \vec{x}|\,|\vec{u}|\,\overbrace{\sin(\underbrace{\sphericalangle(\vec{y} - \vec{x}, \vec{u})}_{\pi/2})}^{1}$$

nach der Formel für den Betrag eines Vektorprodukts
$\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ und $\vec{v} \times \vec{u} = \vec{0}$, da $\vec{u} \parallel \vec{v} \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} d &= |\vec{y} - \vec{x}| = |(\vec{y} - \vec{x}) \times \vec{u}|/|\vec{u}| \\ &= |(\vec{q} + t\vec{v} - \vec{p} - s\vec{u}) \times \vec{u}|/|\vec{u}| = |(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|/|\vec{u}| \end{aligned}$$

Beispiel

Bestimmung des Abstands d sowie nächstgelegener Punkte X, Y für die Geraden

$$g: \vec{x} = (1,1,3)^{\mathrm{t}} + s(1,2,1)^{\mathrm{t}}, \quad h: \vec{y} = (4,1,4)^{\mathrm{t}} + t(1,-2,1)^{\mathrm{t}}$$

nicht parallele Richtungsvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Anwendung der Formeln für nicht parallele Geraden mit den Punkten

$$P = (1,1,3), \quad Q = (4,1,4)$$

und den Richtungsvektoren

$$\vec{u} = (1,2,1)^{\mathrm{t}}, \quad \vec{v} = (1,-2,1)^{\mathrm{t}}$$

(i) Abstand:

$$d = \frac{|[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Betrag des Vektorprodukts im Nenner

$$\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(2-(-2))^2 + (1-1)^2 + ((-2)-2)^2} = 4\sqrt{2}$$

Betrag des Spatprodukts im Zähler

$$\left| \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = 8$$

Einsetzen $\quad \rightsquigarrow \quad d = 8/(4\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

(ii) Punkte kürzesten Abstands:
$\vec{y}-\vec{x} \perp (1,2,1)^{\mathrm{t}}$, $\vec{y}-\vec{x} \perp (1,-2,1)^{\mathrm{t}}$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
0 &= \Big(\big(\underbrace{(4,1,4)^{\mathrm{t}} + t(1,-2,1)^{\mathrm{t}}}_{\vec{y}}\big) - \big(\underbrace{(1,1,3)^{\mathrm{t}} + s(1,2,1)^{\mathrm{t}}}_{\vec{x}}\big)\Big)\cdot(1,2,1)^{\mathrm{t}} \\
&= 10 - 2t - 6 - 6s \\
0 &= \Big(\big((4,1,4)^{\mathrm{t}} + t(1,-2,1)^{\mathrm{t}}\big) - \big((1,1,3)^{\mathrm{t}} + s(1,2,1)^{\mathrm{t}}\big)\Big)\cdot(1,-2,1)^{\mathrm{t}} \\
&= 6 + 6t - 2 + 2s
\end{aligned}$$

Lösung $s = 1,\ t = -1 \quad \rightsquigarrow$

$$\vec{x} = (1,1,3)^{\mathrm{t}} + 1\cdot(1,2,1)^{\mathrm{t}} = (2,3,4)^{\mathrm{t}}, \quad \vec{y} = (3,3,3)^{\mathrm{t}}$$

Probe
Vergleich mit dem berechneten Abstand

$$\sqrt{2} \stackrel{!}{=} d = |\vec{y}-\vec{x}| = |(1,0,-1)^{\mathrm{t}}| = \sqrt{1+0+1} \quad \checkmark$$

Beispiel

Bestimmung des Abstands d sowie nächstgelegener Punkte X, Y für die Geraden

$$g: \vec{x} = (-1,2,1)^{\mathrm{t}} + s(-3,3,-6)^{\mathrm{t}}, \quad h: \vec{y} = (2,-1,4)^{\mathrm{t}} + t(2,-2,4)^{\mathrm{t}}$$

parallele Richtungsvektoren

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Anwendung der Formeln für parallele Geraden mit den Punkten

$$P = (-1,2,1), \quad Q = (2,-1,4)$$

und den Richtungsvektoren

$$\vec{u} = (-3,3,-6)^{\mathrm{t}}, \quad \vec{v} = (2,-2,4)^{\mathrm{t}}$$

(i) Abstand:

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Betrag des Vektorprodukts im Zähler

$$\left| \begin{pmatrix} 2-(-1) \\ -1-2 \\ 4-1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \right|$$
$$= \sqrt{81+81+0} = 9\sqrt{2}$$

Betrag des Richtungsvektors im Nenner

$$|(-3,3,-6)^{\mathrm{t}}| = \sqrt{9+9+36} = 3\sqrt{6}$$

Einsetzen $\quad \rightsquigarrow$

$$d = \frac{9\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

(ii) Punkte kürzesten Abstandes:
gleiche Abstände für alle Punkte X auf g
$\rightsquigarrow$ wähle $X = P = (-1, 2, 1) \in g$ zur Bestimmung eines nächstgelegenen Punkts $Y \in h$
$\vec{y} - \vec{p} \perp \vec{u} \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{y} - \vec{p}) \cdot \vec{u} \\ &= ((2, -1, 4)^{\mathrm{t}} + t(2, -2, 4)^{\mathrm{t}} - (-1, 2, 1)^{\mathrm{t}}) \cdot (-3, 3, -6)^{\mathrm{t}} \\ &= -33 - 36t - 3 = 0 \end{aligned}$$

Einsetzen der Lösung $t = -1 \quad \rightsquigarrow$

$$\vec{y} = (2, -1, 4)^{\mathrm{t}} - (2, -2, 4)^{\mathrm{t}} = (0, 1, 0)^{\mathrm{t}}$$

Probe
Vergleich mit dem berechneten Abstand

$$\sqrt{3} \stackrel{!}{=} d = |\overrightarrow{PY}| = |(0 - (-1), 1 - 2, 0 - 1)^{\mathrm{t}}| = \sqrt{1 + 1 + 1} \quad \checkmark$$