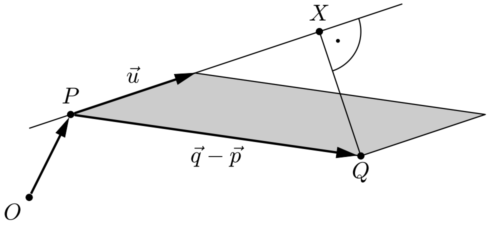
Abstand eines Punktes von einer Geraden

Die Projektion X eines Punktes Q auf eine Gerade durch den Punkt P mit Richtungsvektor $\vec{u}$ erfüllt

$$\overrightarrow{PX} = t\vec{u} \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$$

mit $t = (\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u} \,/\, |\vec{u}|^2$.



Der Abstand $d = |\overrightarrow{XQ}|$ lässt sich ebenfalls direkt berechnen:

$$d = |(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}| \;/\; |\vec{u}|\,,$$

wobei für eine Gerade in der Ebene das Vektorprodukt $(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}$ durch die Determinante

$$\det(\vec{q} - \vec{p}, \vec{u}) = (q_1 - p_1)u_2 - (q_2 - p_2)u_1$$

zu ersetzen ist.

Beweis

(i) Projektion X, $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$:

X am nächsten zu $Q \quad \Leftrightarrow \quad \vec{q} - \vec{x} \perp \vec{u}$

$\rightsquigarrow \quad$ prüfe die Orthogonalität von $\overrightarrow{XQ} = \vec{q} - \vec{x}$ zu $\vec{u}$

Einsetzen von $t = (\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u} / |\vec{u}|^2$ in $0 \overset{!}{=} (\vec{q} - (\underbrace{\vec{p} + t\vec{u}}_{\vec{x}})) \cdot \vec{u} \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{XQ} \cdot \vec{u} &= \left(\vec{q} - \left(\vec{p} + \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,\vec{u}\right)\right) \cdot \vec{u} \\
&= (\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u} - \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,|\vec{u}|^2 = 0 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

(ii) Abstand für Geraden im Raum:

Dreieck $\Delta(X, P, Q)$ rechtwinklig mit Kathete $\overline{XQ}$ und Hypothenuse $\overline{PQ}$

$\Longrightarrow$

$$d = |\vec{q} - \vec{x}| = |\vec{q} - \vec{p}|\,\sin \sphericalangle(\vec{q} - \vec{p}, \vec{u})$$

und Ersetzen des Sinus mit der Formel für die Länge eines Vektorprodukts, $|\vec{v} \times \vec{u}| = |\vec{v}|\,|\vec{u}|\,\sin \sphericalangle(\vec{v}, \vec{u})$, mit $\vec{v} = \vec{q} - \vec{p} \quad \rightsquigarrow \quad$ Ausdruck für den Abstand d

(iii) Gerade in der Ebene:
Ergänzen der Koordinaten der Punkte und Vektoren durch eine dritte Komponente 0 $\rightsquigarrow$

$$\begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (q_1 - p_1)u_2 - (q_2 - p_2)u_1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} d &= |(q_1 - p_1)u_2 - (q_2 - p_2)u_1| / |(u_1, u_2, 0)| \\ &= |\det(\vec{q} - \vec{p}, \vec{u})| / |\vec{u}| \end{aligned}$$

Beispiel

Projektion von $Q = (3, 3, 3)$ auf die Gerade

$$g : (2, 1, 3)^{\mathrm{t}} + t(1, 1, 1)^{\mathrm{t}}$$

und Abstand von Q zu g

(i) Projektion X:
Ortsvektor $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$ mit $t = (\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}/|\vec{u}|^2$, d.h.

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{1^2 + 1^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(ii) Abstand d:

$$d = \left|\overrightarrow{XQ}\right| = \sqrt{(3-3)^2 + (3-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}$$

alternative Berechnung mit Hilfe der Formel

$$d = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Einsetzen von $\vec{q} - \vec{p} = (3-2, 3-1, 3-3)^{\mathrm{t}} = (1, 2, 0)^{\mathrm{t}}$ und $\vec{u} = (1, 1, 1)^{\mathrm{t}}$
$\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} d &= \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{|(1, 1, 1)^{\mathrm{t}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2-0 \\ 0-1 \\ 1-2 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{4+1+1}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$