Abstand eines Punktes von einer Ebene

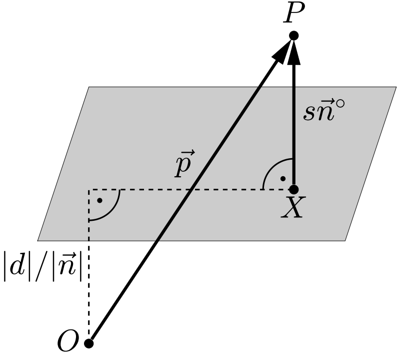
Der Abstand eines Punkts P von einer Ebene

$$E:\ \vec{x}\cdot\vec{n}=d$$

mit Normalenvektor $\vec{n}$ ist

$$d_P=|\vec{p}\cdot\vec{n}-d|/|\vec{n}|\,.$$

Insbesondere ist $d_O=|d|/|\vec{n}|$ der Abstand der Ebene vom Ursprung O.



Der nächstgelegene Punkt $X\in E$ zu P wird als Projektion von P auf E bezeichnet und hat den Ortsvektor

$$\vec{x}=\vec{p}-s\vec{n}^\circ,\quad s=\frac{\vec{p}\cdot\vec{n}-d}{|\vec{n}|}=\sigma d_P$$

mit $\sigma=\operatorname{sign}(\vec{p}\cdot\vec{n}-d)$ und $\vec{n}^\circ=\vec{n}/|\vec{n}|$ dem normierten Normalenvektor.

Für eine Ebene in Hesse-Normalform ist $d \geq 0$ und $|\vec{n}| = 1$, d.h. $\vec{n} = \vec{n}^\circ$, und die Formeln haben die einfachere Form

$$d_P = |\vec{p} \cdot \vec{n} - d|,\, d_O = d, \quad \vec{x} = \vec{p} - (\vec{p} \cdot \vec{n} - d)\vec{n}\,.$$

Beweis

(i) Projektion X:

$\overrightarrow{XP} \parallel \vec{n} \quad \Longrightarrow$

$$\vec{x} = \vec{p} - s\vec{n^\circ}, \quad \vec{n}^\circ = \vec{n}/|\vec{n}|$$

Ebenengleichung für $X \in E \quad \Longrightarrow$

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{p} \cdot \vec{n} - (s\vec{n}^\circ) \cdot \vec{n} = d$$

$\vec{n}^\circ \cdot \vec{n} = |\vec{n}|$, Auflösen nach $s \quad \rightsquigarrow \quad$ Ausdruck für die Projektion

$$s = \frac{\vec{p} \cdot \vec{n} - d}{|\vec{n}|}, \quad \vec{x} = \vec{p} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{n} - d}{|\vec{n}|}\vec{n}^\circ$$

(ii) Abstand:

$$d_P = \left|\overrightarrow{XP}\right| = |\vec{p} - \vec{x}| = \left|\frac{\vec{p} \cdot \vec{n} - d}{|\vec{n}|}\vec{n}^\circ\right| \underset{|\vec{n}^\circ|=1}{=} \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n} - d|}{|\vec{n}|}$$

Beispiel

Abstand des Punkts $P = (2, -4, 5)$ von der Ebene

$$E: \ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4$$

und Projektion X von P auf E

(i) Abstand:

$$d_P = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n} - d|}{|\vec{n}|}$$

Einsetzen von $\vec{p} = (2, -4, 5)$, Normalenvektor (= Koeffizientenvektor der Ebenengleichung) $\vec{n} = (1, -3, 2)^{\mathrm{t}}$, $d = -4$ (rechte Seite der Ebenengleichung) $\quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} d_P &= \frac{|(2, -4, 5)^{\mathrm{t}} \cdot (1, -3, 2)^{\mathrm{t}} - (-4)|}{|(1, -3, 2)^{\mathrm{t}}|} \\ &= \frac{|(2 + 12 + 10) + 4|}{\sqrt{1 + 9 + 4}} = \frac{28}{\sqrt{14}} = 2\sqrt{14} \end{aligned}$$

(ii) Projektion:

$$\vec{x} = \vec{p} - \sigma d_P \vec{n}^\circ$$

$\sigma = \operatorname{sign}(\vec{p}\cdot\vec{n} - d) = \operatorname{sign}(28) = 1,\ \vec{n}^\circ = \vec{n}/|\vec{n}| = (1,-3,2)^\mathrm{t}/\sqrt{14} \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} - (1)(2\sqrt{14}) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \Big/ \sqrt{14} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(iii) Berechnung ohne Anwendung der Formeln:
Einsetzen des Ansatzes

$$\vec{x} = \vec{p} - t\vec{n} = (2,-4,5)^{\mathrm{t}} - t(1,-3,2)^{\mathrm{t}}$$

für den Ortsvektor der Projektion in die Ebenengleichung
$E:\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4 \quad \rightsquigarrow$

$$(2-t) - 3(-4+3t) + 2(5-2t) = -4$$

bzw. nach Umformung

$$24 - 14t = -4$$

mit der Lösung $t = 2$
Einsetzen in den Ansatz $\quad \rightsquigarrow$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Abstand der Projektion X von $P \quad \rightsquigarrow$

$$d_P = |\overrightarrow{XP}| = |(2,-4,5)^{\mathrm{t}} - (0,2,1)^{\mathrm{t}}| = |(2,-6,4)^{\mathrm{t}}| = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$