Volumenberechnung mit Hilfe des Satzes von Gauß

Für einen regulären räumlichen Bereich V, der durch eine Fläche S mit nach außen gerichteter Normale berandet wird, gilt aufgrund des Satzes von Gauß

$$3\,\mathrm{vol}\,V = \iint\limits_S \vec{r}\cdot d\vec{S}\,.$$

Insbesondere erhält man für ein lineares Feld $\vec{F} = A\vec{r}$ wegen $\mathrm{div}\,\vec{F} = \mathrm{Spur}\,A$

$$\mathrm{Spur}\,A\;\mathrm{vol}\,V = \iint\limits_S (A\vec{r})\cdot d\vec{S}\,.$$

Beispiel

Polyeder V mit Inkugel (berührt jede Fläche), Radius r_i

Hesse-Normalform $\quad\rightsquigarrow$

$$\vec{r}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\vec{r}\cdot\vec{n}^\circ}_{=\text{const}}\, dS = r_i\, dS$$

Volumenberechnung mit dem Satz von Gauß $\quad\rightsquigarrow$

$$3\,\mathrm{vol}(V) = \iint\limits_S \vec{r}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_S r_i dS = r_i\,\mathrm{area}(S)$$

- Hexaeder mit Kantenläge a:
  Oberfläche $6a^2$, Inkugelradius $\frac{a}{2}$, Volumen $a^3 = (6a^2\cdot a/2)/3$
- Tetraeder mit Kantenläge a:
  Oberfläche $4\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}a^2}{2} = a^2\sqrt{3}$, Volumen $\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ Inkugelradius $\frac{\sqrt{6}a}{12}$
- Kugel (Grenzfall):
  Volumen $\frac{4\pi r^3}{3}$, Oberfläche $4\pi r^2$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ korrektes Verhältnis $r:3$