Vektorfelder in Zylinderkoordinaten

Bezüglich der auf den Punkt $(x, y, z) = (\varrho \cos\varphi,\ \varrho \sin\varphi,\ z)$ bezogenen orthonormalen Basis

$$\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

besitzt das Vektorfeld

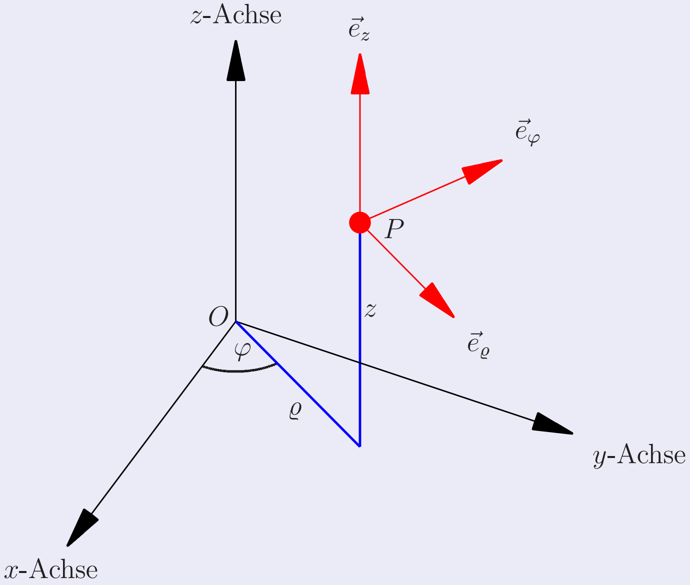
$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

die Darstellung

$$\vec{F} = F_\varrho \vec{e}_\varrho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$$

mit

$$F_\varrho = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varrho,\ F_\varphi = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varphi,\ F_z = \vec{F} \cdot \vec{e}_z\,.$$


z-Achse
$\vec{e}_z$
$\vec{e}_\varphi$
P
O
z
$\vec{e}_\varrho$
φ
ϱ
y-Achse
x-Achse

Beispiel:

(i) Darstellung des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x - yz \\ y + xz \\ z \end{pmatrix}$$

in Zylinderkoordinaten:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \varrho\cos\varphi - \varrho\sin\varphi\, z \\ \varrho\sin\varphi + \varrho\cos\varphi\, z \\ z \end{pmatrix} = \varrho\vec{e}_\varrho + \varrho z\vec{e}_\varphi + z\vec{e}_z$$

Die Koeffizienten $F_\varrho = \varrho$, $F_\varphi = \varrho z$, $F_z = z$ sind unmittelbar ablesbar.
alternativ: Berechnung als Skalarprodukt, z.B.

$$F_\varrho = \vec{F}\cdot\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \varrho\cos\varphi - \varrho\sin\varphi\, z \\ \varrho\sin\varphi + \varrho\cos\varphi\, z \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \varrho$$

(ii) Darstellung des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \varrho\vec{e}_\varrho + \vec{e}_\varphi + \vec{e}_z$$

in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \varrho\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\varrho\cos\varphi - \sin\varphi\\ \varrho\sin\varphi + \cos\varphi\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ y + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$(\cos\varphi = x/r,\ \sin\varphi = y/r)$