Vektorfelder in Polarkoordinaten

Bezüglich der auf den Punkt $(x, y) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$ bezogenen orthonormalen Basis

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

besitzt das Vektorfeld

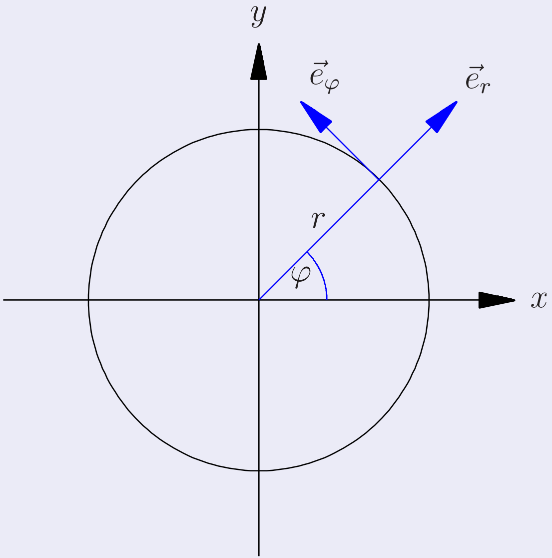
$$\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y$$

die Darstellung

$$\vec{F} = F_r\vec{e}_r + F_\varphi\vec{e}_\varphi$$

mit

$$F_r = \vec{F}\cdot\vec{e}_r, \quad F_\varphi = \vec{F}\cdot\vec{e}_\varphi\,.$$



y
$\vec{e}_\varphi$
$\vec{e}_r$
r
φ
x

Beispiel:

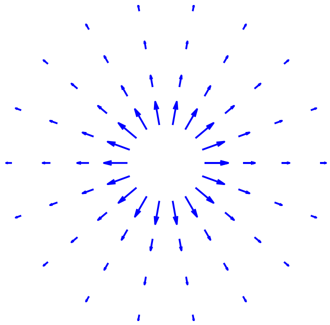
Vektorfeld einer Quelle :

$$\vec{F} = f(r)\vec{e}_r$$

f beschreibt die Stärke des Feldes im Abstand r vom Ursprung.

$f(r) = 1/r \quad \rightsquigarrow$

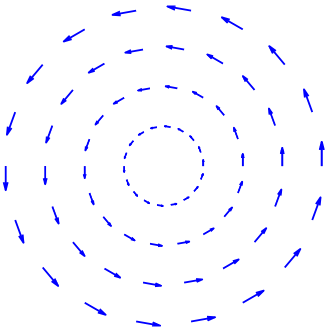
$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\cos\varphi \\ \frac{1}{r}\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$



Vektorfeld eines Wirbels:

$$\vec{F} = f(r)\vec{e}_{\varphi}$$

$f(r) = r \quad \rightsquigarrow$



$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$