Vektorfelder in Kugelkoordinaten

Bezüglich der auf den Punkt $(x, y, z) = (r \sin\vartheta \cos\varphi,\ r \sin\vartheta \sin\varphi,\ r \cos\vartheta)$ bezogenen orthonormalen Basis

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

besitzt das Vektorfeld

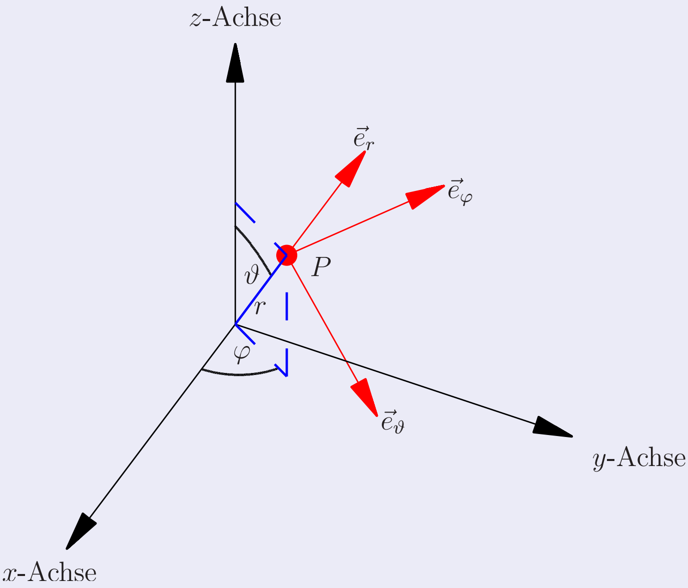
$$\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z$$

die Darstellung

$$\vec{F} = F_r\vec{e}_r + F_\vartheta\vec{e}_\vartheta + F_\varphi\vec{e}_\varphi$$

mit

$$F_r = \vec{F}\cdot\vec{e}_r,\ F_\vartheta = \vec{F}\cdot\vec{e}_\vartheta,\ F_\varphi = \vec{F}\cdot\vec{e}_\varphi\,.$$


z-Achse
$\vec{e}_r$
$\vec{e}_\varphi$
P
ϑ
r
φ
$\vec{e}_\vartheta$
y-Achse
x-Achse

Beispiel:

(i) Vektorfeld in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x - yz \\ y + xz \\ z \end{pmatrix}$$

Darstellung in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \vec{F}(r, \vartheta, \varphi) &= \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi - r \sin\vartheta \sin\varphi \, r \cos\vartheta \\ r \sin\vartheta \sin\varphi + r \sin\vartheta \cos\varphi \, r \cos\vartheta \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix} \\ &= r \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}}_{\vec{e}_r} + r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_\varphi} \end{aligned}$$

(ii) Vektorfeld in Kugelkoordinaten:

$$r\vec{e}_\vartheta + \vec{e}_\varphi$$

Darstellung in kartesischen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi - \sin\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi + \cos\varphi \\ -r\sin\vartheta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} zx - y \\ zy + x \\ -(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

verwendet:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\varrho},\ \sin\varphi = \frac{y}{\varrho}, \quad \cos\vartheta = \frac{z}{r},\ \sin\vartheta = \frac{\varrho}{r}$$

mit $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$