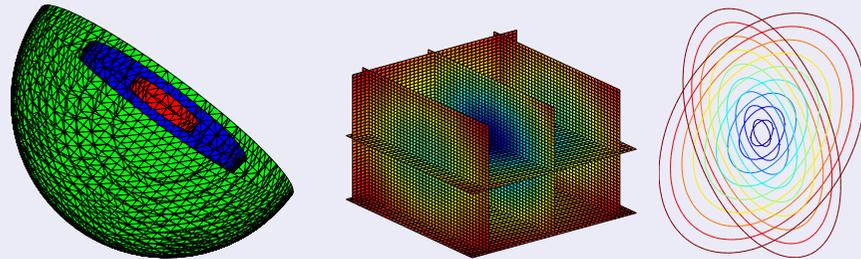


Vektoranalysis

Das Handout ist Bestandteil der Vortragsfolien zur Höheren Mathematik; siehe die Hinweise auf der Internetseite www.immg.uni-stuttgart.de/LstNumGeoMod/VHM/ für Erläuterungen zur Nutzung und zum Copyright.



Zur Visualisierung können die Niveaumengen

$$U(P) = \text{const}$$

oder Einschränkungen auf achsenparallele Ebenen verwendet werden.

Skalarfeld

Ein Skalarfeld

$$P \mapsto U(P)$$

ordnet jedem Punkt P des Definitionsbereiches D eine reelle Zahl U zu.

Alternative Schreibweisen sind

$$U = \Phi(x, y, z), \quad U = U(\vec{r}),$$

wobei (x, y, z) die Koordinaten und \vec{r} der Ortsvektor von P sind.

Vektorfeld

Ein Vektorfeld

$$P \mapsto \vec{F}(P)$$

ordnet einem Punkt P des Definitionsbereiches D einen Vektor \vec{F} zu.

Alternative Schreibweisen sind

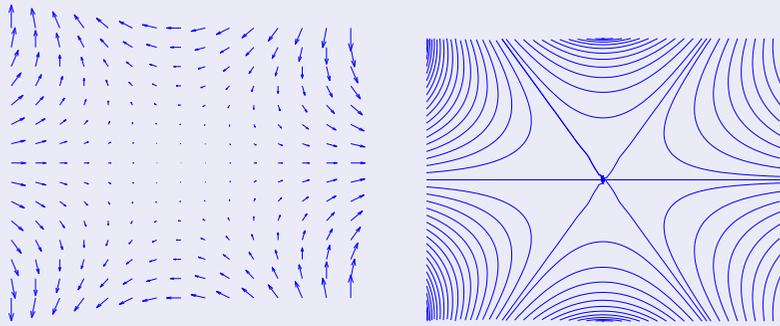
$$\vec{F} = \vec{\Phi}(x, y, z), \quad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}),$$

wobei (x, y, z) die Koordinaten und \vec{r} der Ortsvektor von P sind.

Die Komponenten von \vec{F} bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems werden mit (F_x, F_y, F_z) bezeichnet:

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

mit $\vec{e}_x = (1, 0, 0)^t$, $\vec{e}_y = (0, 1, 0)^t$, und $\vec{e}_z = (0, 0, 1)^t$.



Zur Visualisierung können Richtungsfelder oder Feldlinien verwendet werden.

Bei einem Richtungsfeld werden die Vektoren $\vec{F}(P)$ mit dem Punkt P in Form von Pfeilen $P \rightarrow P + \vec{F}$ assoziiert.

Feldlinien sind Kurven, die in jedem Punkt tangential zu dem Richtungsfeld sind.

Vektorfelder in Polarkoordinaten

Bezüglich der auf den Punkt $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ bezogenen orthonormalen Basis

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

besitzt das Vektorfeld

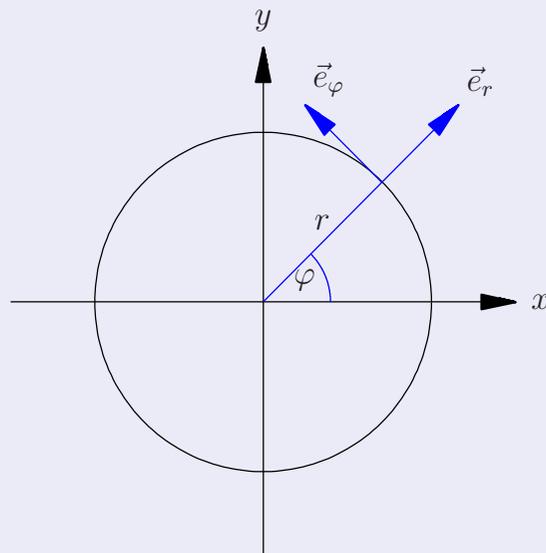
$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$$

die Darstellung

$$\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi$$

mit

$$F_r = \vec{F} \cdot \vec{e}_r, \quad F_\varphi = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varphi.$$



Beispiel:

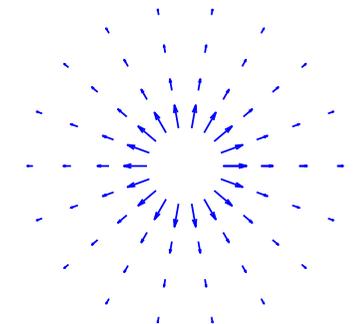
Vektorfeld einer Quelle :

$$\vec{F} = f(r) \vec{e}_r$$

f beschreibt die Stärke des Feldes im Abstand r vom Ursprung.

$$f(r) = 1/r \rightsquigarrow$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \cos \varphi \\ \frac{1}{r} \sin \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

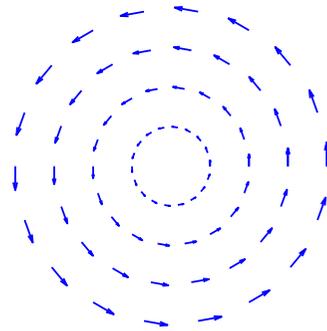


Vektorfeld eines Wirbels:

$$\vec{F} = f(r)\vec{e}_\varphi$$

$$f(r) = r \rightsquigarrow$$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$



Vektorfelder in Zylinderkoordinaten

Bezüglich der auf den Punkt $(x, y, z) = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, z)$ bezogenen orthonormalen Basis

$$\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

besitzt das Vektorfeld

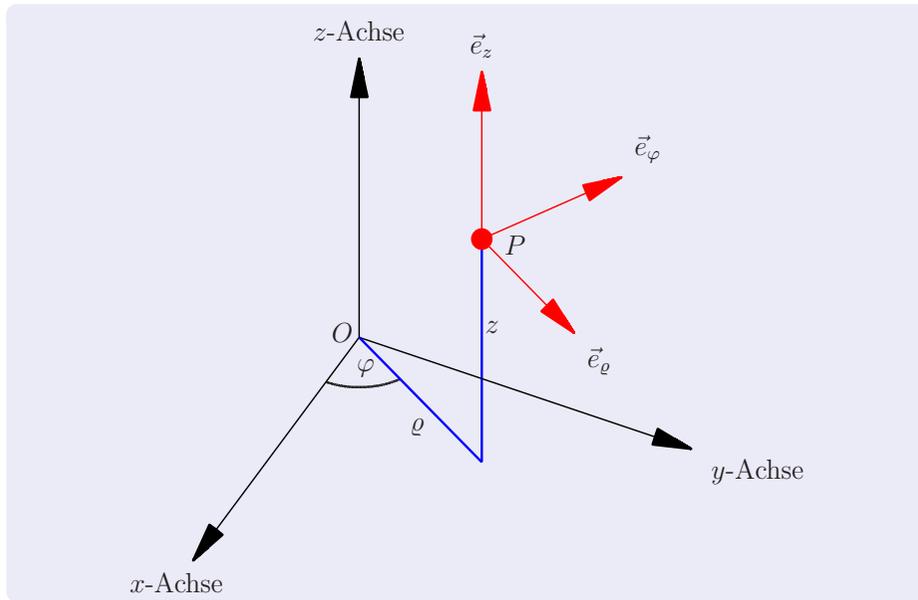
$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

die Darstellung

$$\vec{F} = F_\varrho \vec{e}_\varrho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$$

mit

$$F_\varrho = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varrho, \quad F_\varphi = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varphi, \quad F_z = \vec{F} \cdot \vec{e}_z.$$



Beispiel:

(i) Darstellung des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x - yz \\ y + xz \\ z \end{pmatrix}$$

in Zylinderkoordinaten:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi - \varrho \sin \varphi z \\ \varrho \sin \varphi + \varrho \cos \varphi z \\ z \end{pmatrix} = \varrho \vec{e}_\varrho + \varrho z \vec{e}_\varphi + z \vec{e}_z$$

Die Koeffizienten $F_\varrho = \varrho$, $F_\varphi = \varrho z$, $F_z = z$ sind unmittelbar ablesbar.
alternativ: Berechnung als Skalarprodukt, z.B.

$$F_\varrho = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi - \varrho \sin \varphi z \\ \varrho \sin \varphi + \varrho \cos \varphi z \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \varrho$$

(ii) Darstellung des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \varrho \vec{e}_\varrho + \vec{e}_\varphi + \vec{e}_z$$

in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \varrho \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi - \sin \varphi \\ \varrho \sin \varphi + \cos \varphi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ y + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(\cos \varphi = x/r, \sin \varphi = y/r)$$

Vektorfelder in Kugelkoordinaten

Bezüglich der auf den Punkt $(x, y, z) = (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta)$ bezogenen orthonormalen Basis

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

besitzt das Vektorfeld

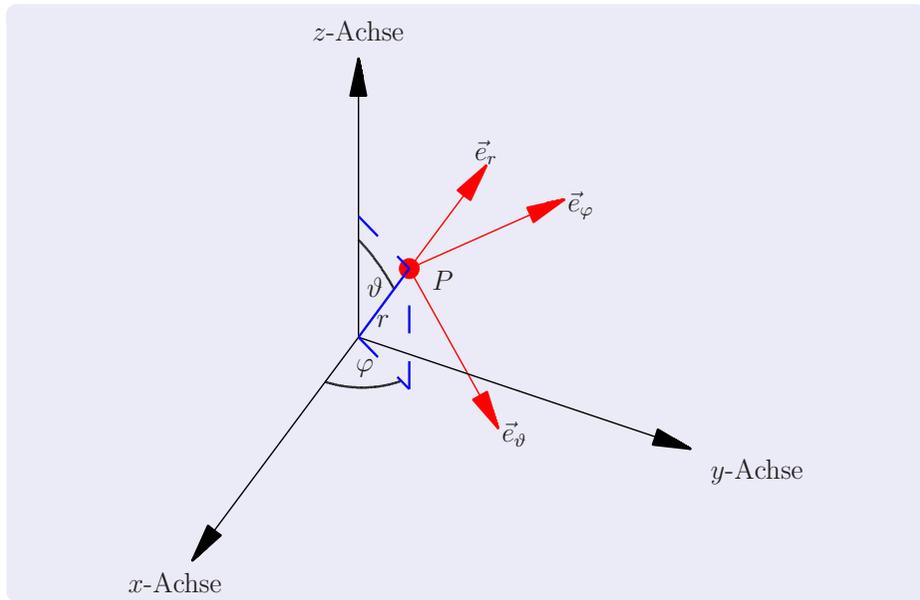
$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

die Darstellung

$$\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$$

mit

$$F_r = \vec{F} \cdot \vec{e}_r, \quad F_\vartheta = \vec{F} \cdot \vec{e}_\vartheta, \quad F_\varphi = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varphi.$$



Beispiel:

(i) Vektorfeld in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x - yz \\ y + xz \\ z \end{pmatrix}$$

Darstellung in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \vec{F}(r, \vartheta, \varphi) &= \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi - r \sin \vartheta \sin \varphi r \cos \vartheta \\ r \sin \vartheta \sin \varphi + r \sin \vartheta \cos \varphi r \cos \vartheta \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix} \\ &= r \underbrace{\begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}}_{\vec{e}_r} + r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_\varphi} \end{aligned}$$

(ii) Vektorfeld in Kugelkoordinaten:

$$r\vec{e}_\vartheta + \vec{e}_\varphi$$

Darstellung in kartesischen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} r \cos \vartheta \cos \varphi - \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \sin \varphi + \cos \varphi \\ -r \sin \vartheta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} zx - y \\ zy + x \\ -(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

verwendet:

$$\cos \varphi = \frac{x}{\varrho}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\varrho}, \quad \cos \vartheta = \frac{z}{r}, \quad \sin \vartheta = \frac{\varrho}{r}$$

$$\text{mit } \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Alternativ lässt sich der Gradient von $U(P)$ als Grenzwert von Integralen über die Oberfläche S eines den Punkt P enthaltenden räumlichen Bereichs V definieren:

$$\lim_{\text{diam } V \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol } V} \iint_S U d\vec{S},$$

wobei das vekorielle Flächenelement $d\vec{S}$ nach außen orientiert ist.

Dies folgt aus einer Variante des Integralsatzes von Gauß und zeigt insbesondere die Invarianz des Gradienten unter orthogonalen Koordinatentransformationen.

Gradient

Der Gradient eines Skalarfeldes U wird durch

$$\text{grad } U = \begin{pmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \\ \partial_z U \end{pmatrix}$$

definiert.

Er ist invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen und gibt die Richtung des stärksten Anstiegs des Skalarfeldes an.

Divergenz

Die Divergenz eines Vektorfeldes

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

wird durch

$$\text{div } \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

definiert.

Sie ist invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen und entspricht physikalisch der Quelledichte des Vektorfeldes.

Alternativ lässt sich die Divergenz eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes $\vec{F}(P)$ als Grenzwert des Flusses durch die Oberfläche S eines den Punkt P enthaltenden räumlichen Bereichs V definieren:

$$\lim_{\text{diam } V \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol } V} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

wobei das vektorielle Flächenelement $d\vec{S}$ nach außen orientiert ist.

Dies folgt unmittelbar aus dem Satz von Gauß und dem Mittelwertsatz und zeigt insbesondere die Invarianz der Divergenz unter orthogonalen Koordinatentransformationen.

Rotation

Die Rotation eines Vektorfeldes

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

wird durch

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix}$$

definiert.

Sie ist invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen und entspricht physikalisch der Wirbeldichte des Vektorfeldes.

Beispiel:

(i) Zentrales Kraftfeld:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \vec{e}_r$$

$$\text{div } \vec{F} = \partial_x x + \partial_y y + \partial_z z = 1 + 1 + 1 = 3$$

(ii) Wirbelförmige Strömung:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \varrho \vec{e}_\varphi$$

$$\text{div } \vec{F} = \partial_x(-y) + \partial_y x + \partial_z 0 = 0 + 0 + 0 = 0$$

Benutzt man die Indexschreibweise

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^3 F_i \vec{e}_i,$$

so lässt sich die Rotation mit Hilfe des ε -Tensors in der Form

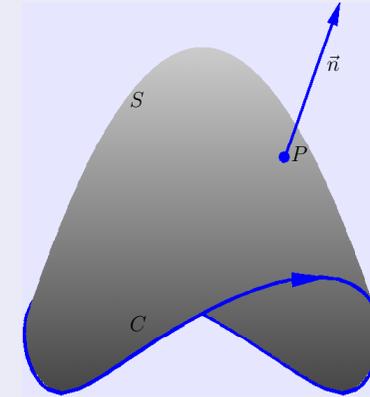
$$(\text{rot } \vec{F})_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k$$

schreiben. Diese Definition ist unter anderem bei der Manipulation von Summen vorteilhaft.

Die normale Komponente der Rotation eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes \vec{F} an einem Punkt P lässt sich als Grenzwert von Arbeitsintegralen definieren:

$$(\vec{n}^\circ \cdot \text{rot } \vec{F})(P) = \lim_{\text{diam } S \rightarrow 0} \frac{1}{\text{area } S} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Dabei wird der Grenzwert über eine Folge regulärer Flächen S mit orientiertem Rand $C : t \mapsto \vec{r}(t)$ gebildet, die alle den Punkt P enthalten und dort die Normale \vec{n} haben, wobei der größte Abstand zweier Flächenpunkte ($\text{diam } S$) und damit auch der Flächeninhalt gegen null geht. Das Skalarprodukt auf der linken Seite wird als Wirbelstärke von \vec{F} um $\vec{n}(P)$ bezeichnet und ist für $\vec{n}(P) \parallel \text{rot } \vec{F}$ am größten.



Die geometrische Charakterisierung der Rotation folgt unmittelbar aus dem Satz von Stokes und dem Mittelwertsatz. Sie zeigt insbesondere, dass $\text{rot } \vec{F}$ invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen ist.

Für ebene Vektorfelder \vec{F} setzt man

$$\text{rot } \vec{F} = \partial_x F_y - \partial_y F_x.$$

Dies entspricht der Definition für räumliche Vektorfelder, wenn man eine zusätzliche dritte Komponente $F_z = 0$ einführt und die Rotation in \mathbb{R}^3 wie oben berechnet.

Beispiel:

(i) Zentrales Kraftfeld:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r\vec{e}_r, \quad \text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y z - \partial_z y \\ \partial_z x - \partial_x z \\ \partial_x y - \partial_y x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Wirbelförmige Strömung:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \varrho \vec{e}_\varphi, \quad \text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y 0 - \partial_z x \\ \partial_z (-y) - \partial_x 0 \\ \partial_x x - \partial_y (-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

Illustration der geometrischen Definition für

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

S : Kreisscheibe in der xy -Ebene mit Rand C , d.h.

$$S: x^2 + y^2 \leq a^2, \quad C: t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d\vec{r} = \vec{r}'(t) dt, \quad \vec{r}'(t) = (-a \sin t, a \cos t, 0)^t \rightsquigarrow$$

$$\begin{aligned} \lim_{\text{diam } S \rightarrow 0} \frac{1}{\text{area } S} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} a^2 dt = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2\pi a^2}{\pi a^2} = 2 \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit

$$\vec{n}^\circ \cdot \text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$$

Laplace-Operator

Für ein Skalarfeld U bezeichnet

$$\Delta U = \text{div}(\text{grad } U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

den Laplace-Operator.

Wie Divergenz und Gradient ist Δ invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen.

Rechenregeln für Differentialoperatoren

Für räumliche Vektorfelder \vec{F} , \vec{G} und räumliche Skalarfelder U , V gelten folgende Rechenregeln.

Bei der Hintereinanderschaltung von Gradient, Divergenz und Rotation gilt

- $\text{rot}(\text{grad } U) = \vec{0}$
- $\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$
- $\text{rot}(\text{rot } \vec{F}) = \text{grad}(\text{div } \vec{F}) - \Delta \vec{F}$

wobei der Laplace-Operator einer vektorwertigen Funktion komponentenweise zu interpretieren ist, d.h.

$$\Delta \vec{F} = \Delta F_x \vec{e}_x + \Delta F_y \vec{e}_y + \Delta F_z \vec{e}_z.$$

Bei der Differentiation von Produkten gilt

- $\text{grad}(UV) = U \text{grad } V + V \text{grad } U$
- $\text{div}(U\vec{F}) = U \text{div } \vec{F} + \vec{F} \cdot \text{grad } U$
- $\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \cdot \text{rot } \vec{G}$
- $\text{rot}(U\vec{F}) = U \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \times \text{grad } U$

Analoge Identitäten gelten auch für ebene Felder. Formal erhält man die entsprechenden Formeln, wenn man die dritte Komponente der Felder null setzt und nur von x und y abhängige Funktionen betrachtet.

(iii) $\text{rot}(\text{rot } \vec{F}) = \text{grad}(\text{div } \vec{F}) - \Delta \vec{F}$:
x-Komponente

$$\partial_y(\text{rot } \vec{F})_z - \partial_z(\text{rot } \vec{F})_y = (\partial_y \partial_x F_y - \partial_y \partial_y F_x) - (\partial_z \partial_z F_x - \partial_z \partial_x F_z)$$

addiere und subtrahiere den Term $\partial_x \partial_x F_x$

\rightsquigarrow erste Komponente der behaupteten Formel:

$$\partial_x(\text{div } \vec{F}) - \Delta F_x$$

analoge Behandlung der anderen Komponenten

(iv) $\text{grad}(UV) = U \text{grad } V + V \text{grad } U$
Produktregel \implies

$$\partial_k(UV) = (\partial_k U)V + U(\partial_k V)$$

Beweis:

(i) $\text{rot}(\text{grad } U) = \vec{0}$:
x-Komponente

$$\partial_y(\text{grad } U)_z - \partial_z(\text{grad } U)_y = \partial_y \partial_z U - \partial_z \partial_y U = 0$$

Analog verschwinden die y- und z-Komponenten.

(ii) $\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$:

Definition der Rotation mit Hilfe des ε -Tensors \rightsquigarrow

$$\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = \sum_i \partial_i \sum_{j,k} \varepsilon_{i,j,k} \partial_j F_k = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{i,j,k} \partial_i \partial_j F_k$$

Vertauschung der Indizes $i, j \implies$

$$\sum_{i,j,k} \dots = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{j,i,k} \underbrace{\partial_j \partial_i F_k}_{\partial_i \partial_j F_k} = - \sum_{i,j,k} \dots$$

also $\text{div } \text{rot } \vec{F} = 0$

(v) $\text{div}(U\vec{F}) = U \text{div } \vec{F} + \vec{F} \cdot \text{grad } U$:
Produktregel \implies

$$\begin{aligned} \text{div}(U\vec{F}) &= \partial_x(UF_x) + \partial_y(UF_y) + \partial_z(UF_z) \\ &= U\partial_x F_x + U\partial_y F_y + U\partial_z F_z + F_x \partial_x U + F_y \partial_y U + F_z \partial_z U \\ &= U \text{div } \vec{F} + \vec{F} \cdot \text{grad } U \end{aligned}$$

(vi) $\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \cdot \text{rot } \vec{G}$:

Definition des Kreuzproduktes und Produktregel \rightsquigarrow

$$\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{i,j,k} ((\partial_i F_j) G_k + [F_j (\partial_i G_k)])$$

Zyklizität von ε und Vertauschung von i, j im zweiten Term $[\dots] \rightsquigarrow$

$$\sum_{i,j,k} \varepsilon_{k,i,j} G_k \partial_i F_j + \sum_{i,j,k} \underbrace{\varepsilon_{j,i,k}}_{-\varepsilon_{i,j,k}} F_i \partial_j G_k$$

\rightsquigarrow behauptete Formel

(vii) $\text{rot}(U\vec{F}) = U \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \times \text{grad } U$:

x-Komponente von $\text{rot}(U\vec{F})$,

$$\partial_y(UF_z) - \partial_z(UF_y) = (\partial_y U)F_z - (\partial_z U)F_y + U\partial_y F_z - U\partial_z F_y,$$

entspricht x-Komponente von

$$U \text{rot } \vec{F} + (\text{grad } U) \times \vec{F}$$

zyklische Vertauschung \rightsquigarrow behauptete Identität

Beispiel:

Illustration der Identität $\text{rot}(\text{rot } \vec{F}) = \text{grad}(\text{div } \vec{F}) - \Delta \vec{F}$ für das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 z \\ y^2 x \\ z^2 y \end{pmatrix}$$

(i) Linke Seite:

$$\text{rot} \left(\text{rot} \begin{pmatrix} x^2 z \\ y^2 x \\ z^2 y \end{pmatrix} \right) = \text{rot} \begin{pmatrix} z^2 - 0 \\ x^2 - 0 \\ y^2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 2z \\ 2x \end{pmatrix}$$

(ii) Rechte Seite:

$$\text{grad}(2xz+2yx+2zy) - \begin{pmatrix} \Delta x^2 z \\ \Delta y^2 x \\ \Delta z^2 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z + 2y \\ 2x + 2z \\ 2y + 2x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2z \\ 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 2z \\ 2x \end{pmatrix}$$

Beispiel:

illustriere die Identität $\text{rot}(U\vec{F}) = U \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \times \text{grad } U$ für

$$U = z, \quad \vec{F} = (-y, x, 1)^t$$

(i) Linke Seite:

$$\text{rot}(U\vec{F}) = \text{rot} \begin{pmatrix} -yz \\ xz \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - x \\ -y - 0 \\ z + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 2z \end{pmatrix}$$

(ii) Rechte Seite:

$$\begin{aligned} U \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \times \text{grad } U &= z \text{rot} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \times \text{grad } z \\ &= z \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 1 + 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten

Für Zylinderkoordinaten

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z$$

gelten für räumliche Skalarfelder

$$U = \Phi(\varrho, \varphi, z)$$

und Vektorfelder

$$\vec{F} = F_\varrho \vec{e}_\varrho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$$

die Transformationsregeln

$$\text{grad } U = \partial_\varrho \Phi \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi + \partial_z \Phi \vec{e}_z,$$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho (\varrho F_\varrho) + \frac{1}{\varrho} \partial_\varphi F_\varphi + \partial_z F_z,$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \left(\frac{1}{\varrho} \partial_\varphi F_z - \partial_z F_\varphi \right) \vec{e}_\varrho + (\partial_z F_\varrho - \partial_\varrho F_z) \vec{e}_\varphi \\ &+ \frac{1}{\varrho} (\partial_\varrho (\varrho F_\varphi) - \partial_\varphi F_\varrho) \vec{e}_z \end{aligned}$$

sowie

$$\Delta U = \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho (\varrho \partial_\varrho \Phi) + \frac{1}{\varrho^2} \partial_\varphi^2 \Phi + \partial_z^2 \Phi.$$

(ii) Quellenförmiges Vektorfeld:

$$\vec{F} = \psi(\varrho) \vec{e}_\varrho$$

Divergenz

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho (\varrho \psi) = \psi' + \varrho^{-1} \psi$$

Spezialfall $\vec{F} = \varrho^s \vec{e}_\varrho \rightsquigarrow$

$$\text{div } \vec{F} = (s+1) \varrho^{s-1}$$

divergenzfrei für $s = -1$ bis auf die Singularität im Ursprung

Beispiel:

(i) Axialsymmetrisches Skalarfeld:

$$U = \Phi(\varrho), \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Gradient und Laplace-Operator

$$\text{grad } U = \varrho \Phi' \vec{e}_\varrho = \Phi' \vec{e}_\varrho, \quad \Delta U = \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho (\varrho \partial_\varrho \Phi) = \Phi'' + \varrho^{-1} \Phi'$$

Spezialfall $U = \varrho^s \rightsquigarrow$

$$\text{grad } U = s \varrho^{s-1} \vec{e}_\varrho = s(x^2 + y^2)^{s/2-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta U = s^2 \varrho^{s-2}$$

(iii) Wirbelförmiges Vektorfeld:

$$\vec{F} = \psi(\varrho) \vec{e}_\varphi$$

Rotation

$$\text{rot } \vec{F} = \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho (\varrho \psi) \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi' + \varrho^{-1} \psi \end{pmatrix}$$

Spezialfall $\vec{F} = \varrho^s \vec{e}_\varphi \rightsquigarrow$

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (s+1) \varrho^{s-1} \end{pmatrix}$$

rotationsfrei für $s = -1$ bis auf die Singularität im Ursprung

Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten

Für Kugelkoordinaten

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta$$

gelten für räumliche Skalarfelder

$$U = \Phi(r, \vartheta, \varphi)$$

und Vektorfelder

$$\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$$

die Transformationsregeln

$$\begin{aligned} \text{grad } U &= \partial_r \Phi \vec{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\vartheta \Phi \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi, \\ \text{div } \vec{F} &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\vartheta F_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi (\sin \vartheta F_\varphi), \\ \text{rot } \vec{F} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} (\partial_\vartheta (\sin \vartheta F_\varphi) - \partial_\varphi F_\vartheta) \vec{e}_r \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \vartheta} (\partial_\varphi F_r - \sin \vartheta \partial_r (r F_\varphi)) \vec{e}_\vartheta \\ &\quad + \frac{1}{r} (\partial_r (r F_\vartheta) - \partial_\vartheta F_r) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

sowie

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \Phi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \partial_\vartheta^2 \Phi + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \partial_\vartheta \Phi).$$

Beispiel:

(i) Radialsymmetrisches Skalarfeld:

$$U = \Phi(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Gradient und Laplace-Operator

$$\text{grad } U = \partial_r \Phi \vec{e}_r, \quad \Delta U = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \Phi) = \Phi'' + \frac{2}{r} \Phi'$$

Spezialfall $U = r^s \rightsquigarrow$

$$\text{grad } U = s r^{s-1} \vec{e}_r = s (x^2 + y^2 + z^2)^{s/2-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Delta U = s(s+1)r^{s-2}$$

harmonisch für $s = -1$ bis auf die Singularität im Ursprung

(ii) Quellenförmiges Vektorfeld:

$$\vec{F} = \psi(r) \vec{e}_r$$

Divergenz

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \psi) = \psi' + \frac{2}{r} \psi$$

Spezialfall $\vec{F} = r^s \vec{e}_r \rightsquigarrow$

$$\text{div } \vec{F} = (s+2)r^{s-1}$$

divergenzfrei für $s = -2$ bis auf die Singularität im Ursprung

Kurvenintegral eines Skalarfeldes

Für eine Kurve C mit regulärer Parametrisierung

$$[a, b] \ni t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

und ein Skalarfeld U wird das Integral

$$\int_C U = \int_a^b U(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt, \quad |\vec{r}'| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2},$$

als Kurvenintegral von U über der Kurve C bezeichnet.

Der Wert des Integrals ist unabhängig von der Parametrisierung, insbesondere auch von der Orientierung.

Weg

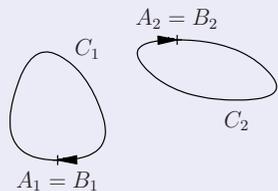
Ein Weg

$$C : [a, b] \ni t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

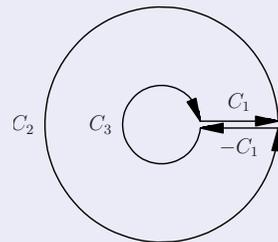
ist eine Kurve mit festgelegtem Durchlaufsinne, der im Allgemeinen durch Pfeile angedeutet wird.

Man sagt, die Kurve verläuft von $A = (x(a), y(a), z(a))$ nach $B = (x(b), y(b), z(b))$.

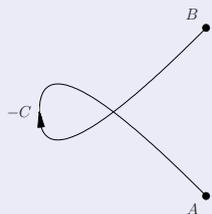
Gilt $A = B$, so spricht man von einem geschlossenen Weg.



nicht zusammenhängender Weg $C = C_1 + C_2$



zum Teil mehrfach durchlaufener Weg $C = C_1 + C_2 - C_1 + C_3$



offener Weg $-C$ mit umgekehrter Durchlaufrichtung

Für zusammengesetzte Wege ist die Notation

$$C_1 + \dots + C_m$$

gebräuchlich.

Dabei können einzelne Wegstücke mehrfach durchlaufen werden ($\sum C_i \neq \cup C_i$), und die Vereinigung der Wege muss nicht zusammenhängend sein.

Schließlich bezeichnet man mit $-C$ den in entgegengesetzter Richtung durchlaufenen Weg C .

Arbeitsintegral eines Vektorfeldes

Für einen Weg C mit regulärer Parametrisierung

$$[a, b] \ni t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

und ein Vektorfeld \vec{F} wird das Integral

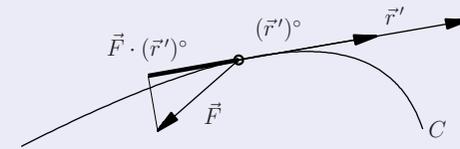
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

als Arbeitsintegral bezeichnet.

In Komponentenschreibweise hat das Arbeitsintegral die Form

$$\int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

mit $dx = x'(t) dt$, $dy = y'(t) dt$, $dz = z'(t) dt$ und F_x , F_y , F_z den Komponenten von \vec{F} .



Es entspricht dem Kurvenintegral der Projektion F_t von \vec{F} in tangentialer Richtung,

$$F_t = \vec{F} \cdot (\vec{r}')^\circ, \quad (\vec{r}')^\circ = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|},$$

und ist unabhängig von der Parametrisierung bei gleichbleibender Orientierung des Weges.

Bei Umkehrung der Durchlaufrichtung von C ändert sich das Vorzeichen des Integrals.

Beispiel:

Beim Durchlaufen des Viertelkreises

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi/2],$$

im Kraftfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

wird die Arbeit

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{\pi/2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} -2 \cos t \sin t dt = [\cos^2 t]_0^{\pi/2} = -1 \end{aligned}$$

verrichtet.

Beispiel:

Für ein Geradenstück

$$C : t \mapsto \vec{r}(t) = \vec{p} + t\vec{d}, \quad t \in [a, b]$$

ist

$$\vec{r}'(t) = \vec{d}, \quad d\vec{r} = \vec{d} dt.$$

Definitionsgemäß ist somit für ein Vektorfeld \vec{F} die verrichtete Arbeit

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{p} + t\vec{d}) \cdot \vec{d} dt.$$

Flächenintegral eines Skalarfeldes

Für eine Fläche S mit regulärer Parametrisierung

$$D \ni (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

und ein Skalarfeld U wird das Integral

$$\iint_S U dS = \iint_D U(\vec{r}(u, v)) |\vec{n}(u, v)| dudv, \quad \vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r},$$

als Flächenintegral von U über S bezeichnet.

Der Wert des Integrals ist unabhängig von der Parametrisierung, insbesondere auch von der Orientierung des Normalenvektors \vec{n} .

Beispielsweise ist für

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b] = [0, 3]$$

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))^t = (t, 1 + 2t)^t$ und für

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + y \end{pmatrix}$$

die verrichtete Arbeit

$$\begin{aligned} \int_0^3 \begin{pmatrix} 2t(1+2t) \\ t^2 + 1 + 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} dt &= \int_0^3 (6t^2 + 6t + 2) dt \\ &= [2t^3 + 3t^2 + 2t]_0^3 = 87. \end{aligned}$$

Beispiel:

Integral eines linearen Skalarfeldes $U = \vec{p} \cdot \vec{r}$ über ein Dreieck

$$D : (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = \vec{a} + u(\vec{b} - \vec{a}) + v(\vec{c} - \vec{a})$$

mit $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1 - u$

Normale (konstant)

$$\vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r} = (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a}), \quad |\vec{n}| = 2 \text{area} D$$

\rightsquigarrow Flächenintegral

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-u} \underbrace{\vec{p} \cdot (\vec{a} + u(\vec{b} - \vec{a}) + v(\vec{c} - \vec{a}))}_{U(\vec{r}(u,v))} \underbrace{2 \text{area} D}_{dS} dv du$$

inneres Integral

$$I_v = \int_0^{1-u} \dots = (1-u)\vec{p} \cdot \vec{a} + (1-u)u\vec{p} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + \frac{(1-u)^2}{2}\vec{p} \cdot (\vec{c} - \vec{a})$$

äußeres Integral

$$\int_0^1 I_v = \frac{1}{2}\vec{p} \cdot \vec{a} + \frac{1}{6}\vec{p} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + \frac{1}{6}\vec{p} \cdot (\vec{c} - \vec{a})$$

Vereinfachung \rightsquigarrow

$$I = \frac{\text{area}D}{3} \vec{p} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

(Flächeninhalt \times Wert von f am Schwerpunkt)

\rightsquigarrow Flächenintegral

$$\begin{aligned} \iint_D U|\vec{n}| \, dudv &= \int_0^\pi \int_0^\pi uv\sqrt{1+u^2} \, dv \, du \\ &= \frac{\pi^2}{2} \int_0^\pi u\sqrt{1+u^2} \, du = \frac{\pi^2}{2} \left[\frac{1}{3}(1+u^2)^{3/2} \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi^2}{6} \left((1+\pi^2)^{3/2} - 1 \right) \end{aligned}$$

Beispiel:

Integral des Skalarfeldes $U = \sqrt{x^2 + y^2} z$ über die Fläche

$$S : D \ni (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ v \end{pmatrix}, \quad 0 \leq u, v \leq \pi$$

(um die z-Achse verdrehter Streifen)

Normale

$$\vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r} = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\partial_u \vec{r} \perp \partial_v \vec{r} \implies$$

$$|\vec{n}| = |\partial_u \vec{r}| \cdot |\partial_v \vec{r}| = \sqrt{1+u^2}$$

$$U(\vec{r}(u, v)) = \sqrt{u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v} v = uv$$

Flussintegral eines Vektorfeldes

Der Fluss eines stetigen Vektorfeldes \vec{F} durch eine Fläche S mit regulärer Parametrisierung

$$D \ni (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \in S$$

in Richtung der Normalen

$$\vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}$$

ist

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) \, dudv.$$

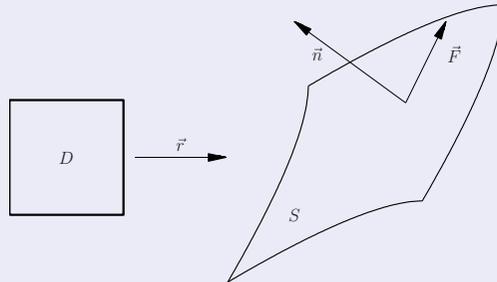
Man bezeichnet dabei

$$d\vec{S} = \vec{n}^\circ dS, \quad dS = |\vec{n}(u, v)| \, du \, dv,$$

als vektorielles Flächenelement.

Bei gleicher Orientierung des Normalenvektors ist das Flussintegral unabhängig von der gewählten Parametrisierung.

Die Umkehrung der Normalenrichtung bewirkt eine Änderung des Vorzeichens.



Die Glattheitsvoraussetzungen an \vec{F} und $\vec{r}(u, v)$ können abgeschwächt werden, indem man das Integral über einen geeigneten Grenzprozess definiert.

Beispiel:

Fluss des Vektorfeldes $\vec{F} = (x, 1, yz)^t$ durch die Fläche

$$S : \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u^2 \\ u + v \\ v^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq u, v \leq 1$$

partielle Ableitungen

$$\partial_u \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} 2u \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_v \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}$$

↪ Normale (z-Komponente positiv gewählt, Fluss nach oben)

$$\vec{n}(u, v) = \partial_u \vec{r}(u, v) \times \partial_v \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} 2v \\ -4uv \\ 2u \end{pmatrix}$$

Fluss von \vec{F} durch S

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} u^2 \\ 1 \\ uv^2 + v^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2v \\ -4uv \\ 2u \end{pmatrix} \, du \, dv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 2u^2v - 4uv + 2u^2v^2 + 2uv^3 \, du \, dv \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 u^\alpha v^\beta \, du \, dv = (\alpha + 1)^{-1} (\beta + 1)^{-1} \rightsquigarrow$$

$$2 \frac{1}{3} \frac{1}{2} - 4 \frac{1}{2} \frac{1}{2} + 2 \frac{1}{3} \frac{1}{3} + 2 \frac{1}{2} \frac{1}{4} = -\frac{7}{36}$$

Fluss durch einen Funktionsgraph

Der Fluss eines stetigen Vektorfeldes \vec{F} nach oben (positive z-Komponente der Normalen) durch den Graph S einer differenzierbaren skalaren Funktion $z = f(x, y)$ über dem Definitionsgebiet $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ist

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D -F_x \partial_x f - F_y \partial_y f + F_z dx dy.$$

Beispiel:

Fluss des Vektorfeldes $\vec{F} = (x, 1, z)^t$ in z-Richtung durch den Graph der Funktion $z = f(x, y) = x^2 - y$ über dem Bereich $D: |x| + |y| \leq 1$

Symmetrie des Vektorfeldes und Funktionsgraphen zur yz-Ebene

↔ Integration über den Teilbereich von D mit $x \geq 0$ (Faktor 2)

Gesamtfluss

$$\begin{aligned} \iint_D -F_x \partial_x f - F_y \partial_y f + F_z dx dy &= 2 \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} -x(2x) + 1 + x^2 - y dy dx \\ &= 2 \int_0^1 \left[-x^2 y + y - \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=x-1}^{y=1-x} dx = \\ &= 2 \int_0^1 -2x^2(1-x) + 2(1-x) + 0 dx = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Beweis:

$$S: (u, v) \rightarrow \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix}$$

partielle Ableitungen und Normale mit positiver z-Komponente

$$\partial_u \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_u f \end{pmatrix}, \quad \partial_v \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_v f \end{pmatrix}, \quad \vec{n}(u, v) = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r} = \begin{pmatrix} -\partial_u f \\ -\partial_v f \\ 1 \end{pmatrix}$$

↔ Fluss

$$\begin{aligned} \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) du dv &= \iint_D \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\partial_u f \\ -\partial_v f \\ 1 \end{pmatrix} du dv \\ &= \iint_D -F_x \partial_u f - F_y \partial_v f + F_z du dv \end{aligned}$$

Beispiel:

Fluss eines konstanten Vektorfeldes $\vec{F} = \vec{p}$ durch einen Teilbereich S einer Ebene

$$S: z = f(x, y) = ax + by + c, \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

in z-Richtung (von unten nach oben)

Formel für den Fluss durch einen Funktionsgraph ↔

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D -ap_x - bp_y + p_z dx dy \\ &= \text{area}(D) (-ap_x - bp_y + p_z) \end{aligned}$$

$$(\partial_x f = a, \quad \partial_y f = b)$$

Fluss durch einen Zylindermantel

Der Fluss eines Vektorfeldes

$$\vec{F} = F_\varrho \vec{e}_\varrho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$$

nach außen durch den Mantel eines Zylinders mit Randkurve $\varrho = \varrho(\varphi)$ ist

$$\int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho \varrho - F_\varphi \partial_\varphi \varrho \, dz \, d\varphi.$$

Der Fluss des Vektorfeldes durch eine Rotationsfläche, die durch Drehung der Kurve $\varrho = \varrho(z)$ um die z-Achse entsteht, ist

$$\int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho \varrho - F_z \varrho \partial_z \varrho \, dz \, d\varphi.$$

Beweis:

Darstellung des Vektorfeldes und Parametrisierung der Mantelfläche in Zylinderkoordinaten

$$\vec{F} = F_\varrho \vec{e}_\varrho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z, \quad S: \vec{r}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

(i) $\varrho = \varrho(\varphi)$:

nach außen gerichtete Flächennormale

$$\begin{aligned} \vec{n}(\varphi, z) = \partial_\varphi \vec{r} \times \partial_z \vec{r} &= \begin{pmatrix} \partial_\varphi \varrho \cos \varphi - \varrho \sin \varphi \\ \partial_\varphi \varrho \sin \varphi + \varrho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_\varphi \varrho \sin \varphi + \varrho \cos \varphi \\ -\partial_\varphi \varrho \cos \varphi + \varrho \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\partial_\varphi \varrho \vec{e}_\varphi + \varrho \vec{e}_\varrho \end{aligned}$$

Orthogonalität der Basisvektoren $\vec{e}_\varrho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z \rightsquigarrow \vec{F} \cdot \vec{n} = F_\varrho \varrho - F_\varphi \partial_\varphi \varrho$

Der Fluss durch den Mantel eines Kreiszyinders mit $\varrho = a$ ist demnach

$$a \int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho \, dz \, d\varphi,$$

d.h. nur die axialsymmetrische Komponente des Feldes liefert einen Beitrag.

Insbesondere ist beim Kreiszyinder der Fluss für ein axialsymmetrisches Feld $\vec{F} = f(\varrho) \vec{e}_\varrho$ gleich $2\pi a(z_{\max} - z_{\min})f(a)$.

(ii) $\varrho = \varrho(z)$:

nach außen gerichtete Flächennormale

$$\begin{aligned} \vec{n}(\varphi, z) = \partial_\varphi \vec{r} \times \partial_z \vec{r} &= \begin{pmatrix} -\varrho \sin \varphi \\ \varrho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_z \varrho \cos \varphi \\ \partial_z \varrho \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \\ -\varrho \partial_z \varrho \end{pmatrix} = \varrho \vec{e}_\varrho - \varrho \partial_z \varrho \vec{e}_z \end{aligned}$$

\rightsquigarrow Feldkomponente in Normalenrichtung

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = F_\varrho \varrho - F_z \varrho \partial_z \varrho$$

ϱ konstant für einen Kreiszyinder

\rightsquigarrow Verschwinden der Terme mit Ableitungen von ϱ

Beispiel:

Fluss des Feldes

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} xz^2 \\ yz^2 \\ (x^2 + y^2)z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho z^2 \cos \varphi \\ \varrho z^2 \sin \varphi \\ \varrho^2 z \end{pmatrix}$$

von innen nach außen durch den Mantel eines Zylinders mit Abstand a zur z -Achse und $z_{\min} = 0$, $z_{\max} = b$
normale Feldkomponente

$$F_\varrho = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \varrho z^2 \cos \varphi \\ \varrho z^2 \sin \varphi \\ \varrho^2 z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \varrho z^2$$

Fluss

$$a \int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho(a, \varphi, z) dz d\varphi = a \int_0^{2\pi} \int_0^b az^2 dz d\varphi = \frac{1}{3} a^2 b^3 \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3} \pi a^2 b^3$$

Beispiel:

Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \varrho \vec{e}_\varrho + z \vec{e}_z$$

nach außen durch einen Zylindermantel, der durch die Kardioide $\varrho(\varphi) = 1 - \cos \varphi$ im Bereich $z \in [0, a]$ erzeugt wird

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a F_\varrho \varrho - F_\varphi \varrho_\varphi dz d\varphi$$

$$F_\varrho = \varrho, F_\varphi = 0 \implies$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \varrho^2(\varphi) dz d\varphi = a \int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = a \left(2\pi + 0 + \frac{2\pi}{2} \right) = 3\pi a$$

Fluss durch eine Sphäre

Der Fluss eines in Kugelkoordinaten dargestellten Vektorfeldes

$$\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$$

von innen nach außen durch eine Sphäre mit Abstand $r = R$ zum Ursprung ist

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} F_r R^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta,$$

d.h. nur die radiale Komponente des Feldes liefert einen Beitrag. Insbesondere ist der Fluss für ein radiales Feld $\vec{F} = f(r) \vec{e}_r$ gleich $4\pi R^2 f(R)$.

Beispiel:

Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{F} = (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = (r \sin \vartheta)^2 \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \vartheta \\ r \sin \varphi \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

von innen nach außen durch die Sphäre S mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung

radiale Feldkomponente

$$\begin{aligned} F_r(r, \vartheta, \varphi) &= \vec{F} \cdot \vec{e}_r = (r \sin \vartheta)^2 \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \\ &= (r \sin \vartheta)^2 r \sin^2 \vartheta \end{aligned}$$

$r = R \rightsquigarrow$ Fluss von \vec{F} durch S

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdots d\vec{S} &= \iint_S F_r dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F_r(R, \vartheta, \varphi) \underbrace{R^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta}_{dS} \\ &= R^5 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin^5 \vartheta}{(1 - \cos^2 \vartheta)^2 \sin \vartheta} d\varphi d\vartheta \\ &= 2\pi R^5 \left[-\cos \vartheta + \frac{2}{3} \cos^3 \vartheta - \frac{1}{5} \cos^5 \vartheta \right]_0^\pi \\ &= 2\pi R^5 \left(2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \right) = \frac{32}{15} \pi R^5 \end{aligned}$$

Beispiel:

axialsymmetrisches Feld

$$\vec{F} = F_\varrho(\varrho, z) \vec{e}_\varrho + F_z(\varrho, z) \vec{e}_z, \quad \vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

radiale Feldkomponente

$$F_r = \vec{F} \cdot \vec{e}_r, \quad \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\varrho \cdot \vec{e}_r = \sin \vartheta, \quad \vec{e}_z \cdot \vec{e}_r = \cos \vartheta \implies$$

$$F_r = F_\varrho \sin \vartheta + F_z \cos \vartheta$$

Beispiel:

Fluss der senkrechten Strömung $\vec{F} = (0, 0, z)^t = (0, 0, r \cos \vartheta)^t$ von unten nach oben durch die Halbkugelschale

$$S: r = R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi/2$$

radiale Feldkomponente

$$F_r(r, \vartheta, \varphi) = \vec{F} \cdot \vec{e}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} = r \cos^2 \vartheta$$

$r = R \rightsquigarrow$ Fluss von \vec{F} durch S

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} F_r(R, \vartheta, \varphi) R^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} R^3 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\varphi d\vartheta \\ &= 2\pi R^3 \left[\frac{-\cos^3 \vartheta}{3} \right]_{\vartheta=0}^{\pi/2} = \frac{2\pi R^3}{3} \end{aligned}$$

Fluss durch eine Sphäre S mit Radius R

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (F_\varrho \sin \vartheta + F_z \cos \vartheta) R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ = 2\pi R^2 \int_0^\pi (F_\varrho \sin \vartheta + F_z \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \end{aligned}$$

Spezialfall $F_\varrho = \varrho^{2s}, F_z = c: \quad \varrho = r \sin \vartheta \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{e}_r = F_\varrho \sin \vartheta + F_z \cos \vartheta &= R^{2s} \sin^{2s+1} \vartheta + c \cos \vartheta \\ \int_0^\pi \cos \vartheta d\vartheta &= 0 \rightsquigarrow \text{Fluss von } \vec{F} \text{ durch } S \end{aligned}$$

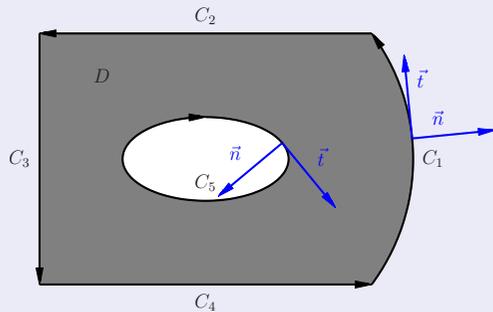
$$\begin{aligned} 2\pi R^2 \int_0^\pi R^{2s} \sin^{2s+2} \vartheta d\vartheta &= 2\pi R^2 R^{2s} \frac{(2(s+1))!}{2^{2(s+1)}((s+1)!)^2} \pi \\ &= 2\pi^2 \left(\frac{R}{2}\right)^{2(s+1)} \binom{2s+2}{s+1} \end{aligned}$$

Orientierter Rand einer Fläche

Der orientierte Rand C eines ebenen Bereichs D setzt sich aus Wegen C_i zusammen, deren Durchlaufsinne so gewählt ist, dass D links von C_i liegt:

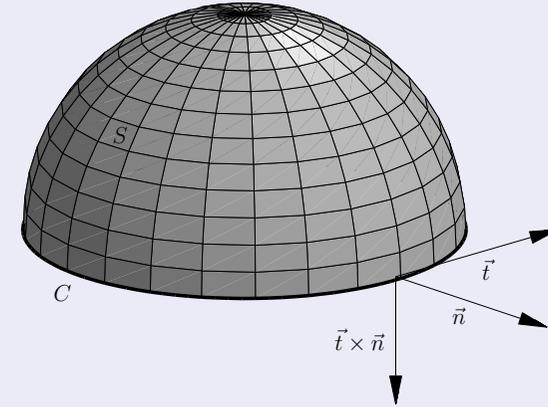
$$C = C_1 + \dots + C_m.$$

Dies bedeutet, dass die nach außen gerichtete Kurvennormale \vec{n} und der Tangentenvektor \vec{t} ein Rechtssystem bilden.



orientierter Rand
 $S = C_1 + \dots + C_5$

Entsprechend setzt sich der orientierte Rand C einer räumlichen Fläche S mit orientierter Normalen \vec{n} aus Wegen C_i zusammen, deren Orientierung so gewählt ist, dass an einem Kurvenpunkt das Kreuzprodukt aus Tangentenvektor \vec{t} an die Kurve und Normalenvektor \vec{n} der Fläche von der Fläche weg zeigt.



Satz von Gauß

Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld \vec{F} auf einem regulären räumlichen Bereich V , der durch eine Fläche S mit nach außen orientiertem vektoriellen Flächenelement $d\vec{S}$ berandet wird, gilt

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Die Glattheitsvoraussetzungen an \vec{F} und S können abgeschwächt werden, indem man die Integrale über geeignete Grenzprozesse definiert.

Beweis:

Hauptsatz für mehrdimensionale Integrale \implies

$$\iiint_V \partial_\nu F_\nu dV = \iint_S F_\nu n_\nu^\circ dS$$

mit F_ν den Komponenten von \vec{F}
 Summation über $\nu = 1, 2, 3$, $d\vec{S} = \vec{n}^\circ dS \rightsquigarrow$

$$\sum_\nu \partial_\nu F_\nu = \operatorname{div} \vec{F}$$

$$\sum_\nu F_\nu n_\nu^\circ dS = \vec{F} \cdot \vec{n}^\circ dS = \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

d.h. die behauptete Identität

Beispiel:

Illustration des Satzes von Gauß für die Einheitskugel

$V : r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ mit Oberfläche S und das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ xy \\ z^3 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung von Kugelkoordinaten

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta$$

Volumen- und vektorielles Flächenelement

$$dV = r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta$$

$$d\vec{S} = \vec{e}_r \underbrace{\sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta}_{dS}$$

(Radius $R = 1$)

(ii) $I_S = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$:

$$F_r = \vec{F} \cdot \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos^3 \vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$= \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \sin^2 \varphi \cos \varphi \sin^3 \vartheta + \cos^4 \vartheta$$

↪ Flussintegral

$$I_S = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F_r \underbrace{\sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta}_{dS}$$

$$= \pi \int_0^\pi \sin \vartheta (1 - \cos^2 \vartheta) \, d\vartheta + 0 + 2\pi \int_0^\pi \cos^4 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta$$

$$= \pi \left([-\cos \vartheta]_0^\pi + \left[\frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \right]_0^\pi \right) + 2\pi \left[-\frac{1}{5} \cos^5 \vartheta \right]_0^\pi$$

$$= 2\pi - \frac{2}{3}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{32}{15}\pi$$

(i) $I_V = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV$:

Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial_x x + \partial_y xy + \partial_z z^3 = 1 + x + 3z^2$$

Darstellung mit Kugelkoordinaten ↪

$$I_V = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (1 + r \cos \varphi \sin \vartheta + 3r^2 \cos^2 \vartheta) \underbrace{r^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr}_{dV}$$

Produktform des zweiten und dritten Terms, $\int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi = 0$ ↪

$$I_V = \operatorname{vol} V + 0 + 2\pi \left(\int_0^1 r^4 \, dr \right) \left(\int_0^\pi 3 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi + 2\pi \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_{r=0}^1 [-\cos^3 \vartheta]_{\vartheta=0}^\pi = \frac{4}{3}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{32}{15}\pi$$

Beispiel:

Illustration des Satzes von Gauß für das radiale Feld $\vec{F} = r^s \vec{e}_r$ und die Kugel $V : r < R$ mit Oberfläche $S : r = R$

Formel für die Divergenz in Kugelkoordinaten \implies

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 r^s) = (s+2)r^{s-1}$$

$$dV = 4\pi r^2 \, dr \implies$$

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV = 4\pi \int_0^R (s+2)r^{s+1} \, dr = 4\pi R^{s+2} \quad (s > -2)$$

$$d\vec{S} = \vec{e}_r \, dS \implies$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S R^s \, dS = \operatorname{area}(S) R^s = (4\pi R^2) R^s$$

Volumenberechnung mit dem Satz von Gauß

Für einen regulären räumlichen Bereich V , der durch eine Fläche S mit nach außen gerichteter Normale berandet wird, gilt aufgrund des Satzes von Gauß

$$3 \text{ vol } V = \iint_S \vec{r} \cdot d\vec{S}.$$

Insbesondere erhält man für ein lineares Feld $\vec{F} = A\vec{r}$ wegen $\text{div } \vec{F} = \text{Spur } A$

$$\text{Spur } A \text{ vol } V = \iint_S (A\vec{r}) \cdot d\vec{S}.$$

Satz von Gauß in der Ebene

Für einen regulären ebenen Bereich A mit entgegen dem Uhrzeigersinn orientierten Rand

$$C : t \mapsto \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$

(Rand liegt links) gilt für ein stetig differenzierbares bivariates Vektorfeld $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$

$$\iint_A \text{div } \vec{F} \, dA = \int_C \vec{F} \cdot \vec{n}^\circ \, dC = \int_C \vec{F} \times d\vec{r},$$

wobei

$$\text{div } \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y, \quad \vec{F} \times d\vec{r} = (F_x y'(t) - F_y x'(t)) \, dt.$$

Beispiel

Polyeder V mit Inkugel (berührt jede Fläche), Radius r_i

Hesse-Normalform \rightsquigarrow

$$\vec{r} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\vec{r} \cdot \vec{n}^\circ}_{=\text{const}} \, dS = r_i \, dS$$

Volumenberechnung mit dem Satz von Gauß \rightsquigarrow

$$3 \text{ vol}(V) = \iint_S \vec{r} \cdot d\vec{S} = \iint_S r_i \, dS = r_i \text{ area}(S)$$

- Hexaeder mit Kantenlänge a :
Oberfläche $6a^2$, Inkugelradius $\frac{a}{2}$, Volumen $a^3 = (6a^2 \cdot a/2)/3$
- Tetraeder mit Kantenlänge a :
Oberfläche $4 \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}a^2}{2} = a^2 \sqrt{3}$, Volumen $\frac{\sqrt{2}a^3}{12} \rightsquigarrow$ Inkugelradius $\frac{\sqrt{6}a}{12}$
- Kugel (Grenzfall):
Volumen $\frac{4\pi r^3}{3}$, Oberfläche $4\pi r^2 \rightsquigarrow$ korrektes Verhältnis $r : 3$

Beispiel:

Illustration des Satzes von Gauß für das ebene Vektorfeld

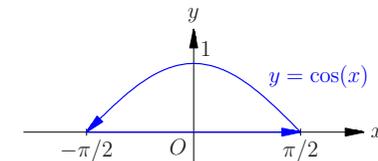
$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x - y^2 \\ xy + y \end{pmatrix}$$

über dem Bereich A , berandet von der Kurve C , die aus den zwei Kurvenstücken

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} -t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [-\pi/2, \pi/2]$$

besteht



(i) Linke Seite im Satz von Gauß:

$$\iint_A \operatorname{div} \vec{F} dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos x} 1 + (x+1) dy dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2+x) \cos x dx = 4$$

(ii) Rechte Seite:

$\vec{F} \parallel d\vec{r} = (1, 0)^t dt$ auf $C_1 \implies \vec{F} \times d\vec{r} = 0$ und folglich Integration nur über C_2

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \times d\vec{r} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{(-t - \cos^2 t)}_{F_x} \underbrace{(-\sin t)}_{y'} - \underbrace{(-t \cos t + \cos t)}_{F_y} \underbrace{(-1)}_{x'} dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t \sin t + \cos t dt = [2 \sin t - t \cos t]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4 \end{aligned}$$

(Integrale von ungeraden Funktionen über $[-\pi/2, \pi/2]$ sind null.)

Beispiel:

Flächeninhalt des Gebiets A , das von einer Ellipse C mit Halbachsenlängen $a, b > 0$ berandet wird

Parametrisierung der Randkurve:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Flächeninhalt

$$\begin{aligned} \operatorname{area} A &= \frac{1}{2} \int_C \vec{r} \times d\vec{r} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \sin t dt \\ b \cos t dt \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} 1 dt = \pi ab \end{aligned}$$

Flächenberechnung mit dem Satz von Gauß

Der Inhalt einer ebenen Fläche A mit entgegen dem Uhrzeigersinn orientierten Rand $C : t \mapsto \vec{r}(t)$ lässt sich durch

$$\operatorname{area}(A) = \frac{1}{2} \int_C \vec{r} \times d\vec{r}$$

berechnen.

Anstatt von \vec{r} kann auch ein anderes Vektorfeld \vec{F} mit konstanter Divergenz verwendet werden; der Faktor $1/2$ ist dann durch den $1/\operatorname{div} \vec{F}$ zu ersetzen.

Satz von Green

Für ein stetig differenzierbares bivariates Vektorfeld \vec{F} auf einem regulären ebenen Bereich A mit entgegen dem Uhrzeigersinn orientierten Rand $C : t \mapsto \vec{r}(t)$ gilt

$$\iint_A \operatorname{rot} \vec{F} dA = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

wobei $\operatorname{rot} \vec{F} = \partial_x F_y - \partial_y F_x$.

Diese auf Green zurückgehende Identität ist ein Spezialfall des Satzes von Stokes.

Die Glattheitsvoraussetzungen können abgeschwächt werden, indem man die Integrale über geeignete Grenzprozesse definiert.

Beweis:

Hauptsatz für zweidimensionale Integrale:

$$\iint_A \partial_x g = \int_C g \bar{n}_x^0, \quad \iint_A \partial_y h = \int_C h \bar{n}_y^0$$

mit $(\bar{n}_x^0, \bar{n}_y^0)$ der nach außen gerichteten Einheitsnormalen von A
 setze $g = F_y$, $h = -F_x$ und berücksichtige

$$\bar{n}(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}, \quad \bar{n}^0 = \bar{n}/|\bar{n}|, \quad dC = |\bar{n}(t)| dt$$

↪

$$\iint_A \partial_x g - \partial_y h = \int_C \left(F_y \frac{y'}{|\bar{n}|} + F_x \frac{x'}{|\bar{n}|} \right) |\bar{n}| dt = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

- Flächenintegral:

$$\iint_A (\partial_x F_y - \partial_y F_x) dA = \iint_A c - b dA = \pi(c - b)$$

- Arbeitsintegral:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} a \cos t + b \sin t \\ c \cos t + d \sin t \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{\vec{r}'(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} -a \cos t \sin t - b \sin^2 t + c \cos^2 t + d \sin t \cos t dt \\ &= \pi(c - b), \end{aligned}$$

$$\text{da } \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt = 0 \text{ und } \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = 0$$

Beispiel:

Illustration des Satzes von Green für das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

und die Einheitskreisscheibe

$$A : x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

mit dem Rand

$$C : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Beispiel:

singuläres Vektorfeld

$$\vec{F} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

auf der Kreisscheibe

$$A : x^2 + y^2 \leq R, \quad R > 0$$

Rotation

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \partial_x F_y - \partial_y F_x \\ &= \frac{x^2 + y^2 - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-(x^2 + y^2) + y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

Parametrisierung des Randes C der Kreisscheibe

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

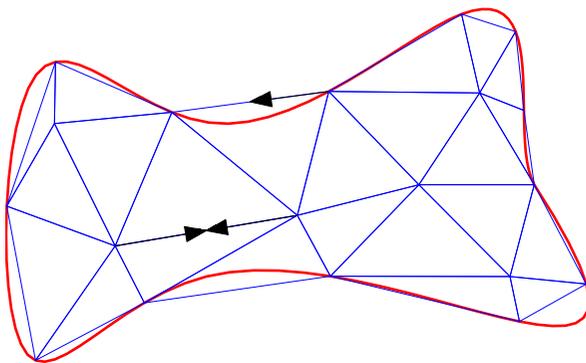
Arbeitsintegral

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C F_x x' + F_y y' \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-R \sin t}{R^2} (-R \sin t) + \frac{R \cos t}{R^2} R \cos t dt = 2\pi \neq 0 \end{aligned}$$

kein Widerspruch zum Satz von Green wegen der Singularität von \vec{F} bei $(0, 0)$

Beweisskizze:

Approximation von \vec{F} durch ein stückweise lineares Vektorfeld auf einer Triangulierung von S



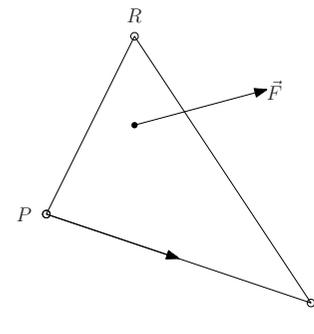
Aufhebung der Arbeitsintegrale im Inneren
 \rightsquigarrow nur ein Dreieck zu betrachten

Satz von Stokes

Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld \vec{F} auf einer regulären Fläche S mit orientiertem Rand C gilt

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Die Glattheitsvoraussetzungen an \vec{F} und S können abgeschwächt werden, indem man die Integrale über geeignete Grenzprozesse definiert.



$\vec{F} = A\vec{x} + \vec{b}$, bestimmt durch Werte an den Eckpunkten P, Q, R

Zerlegung von A in einen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil

$$A = D + E, \quad d_{j,k} = \frac{1}{2}(a_{j,k} + a_{k,j}), \quad e_{j,k} = \frac{1}{2}(a_{j,k} - a_{k,j})$$

Der symmetrische Anteil $\vec{G} = D\vec{x} + \vec{b}$ besitzt ein Potential:

$$U = \frac{1}{2}\vec{x} \cdot (D\vec{x}) + \vec{b} \cdot \vec{x}, \quad \text{grad } U = \vec{G}$$

\rightsquigarrow Für den symmetrischen Anteil sind beide Seiten im Satz von Stokes null.

↪ betrachte nur ein antisymmetrisches Feld

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} 0 & -h_3 & h_2 \\ h_3 & 0 & -h_1 \\ -h_2 & h_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{h} \times \vec{x}$$

(i) Linke Seite $\iint_S \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S}$:

$$\text{rot } \vec{H} = \text{rot} \begin{pmatrix} -h_3x_2 + h_2x_3 \\ -h_1x_3 + h_3x_1 \\ -h_2x_1 + h_1x_2 \end{pmatrix} = 2\vec{h}$$

Normale: $(\vec{q} - \vec{p}) \times (\vec{r} - \vec{p}) / |(\vec{q} - \vec{p}) \times (\vec{r} - \vec{p})|$,
 area $S = \frac{1}{2} |(\vec{q} - \vec{p}) \times (\vec{r} - \vec{p})| \implies$

$$\iint_S \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S} = \vec{h} \cdot (\vec{q} \times \vec{r} + \vec{r} \times \vec{p} + \vec{p} \times \vec{q})$$

Beispiel:

Illustration des Satzes von Stokes für das Vektorfeld

$$\vec{F} = (z, x, y)^t$$

und die Halbkugelschale

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0$$

- Rotation von \vec{F}

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y y - \partial_z x \\ \partial_z z - \partial_x y \\ \partial_x x - \partial_y z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- vektorielles Flächenelement in Kugelkoordinaten

$$d\vec{S} = \vec{e}_r dS = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)^t \sin \vartheta d\varphi d\vartheta$$

- Randkurve:

$$C : t \mapsto \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)^t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

(ii) Rechte Seite $\int_C \vec{H} \cdot d\vec{r}$:

betrachte Teilrand $C_r : \vec{p} + t(\vec{q} - \vec{p}), 0 \leq t \leq 1$

↪ Arbeitsintegral

$$\int_0^1 \vec{h} \times (\vec{p} + t(\vec{q} - \vec{p})) \cdot (\vec{q} - \vec{p}) dt = (\vec{h} \times \vec{p}) \cdot \vec{q}$$

(Der zweite Term verschwindet, da $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$.)

analoge Betrachtung für die Wege C_p und C_q ↪

$$\begin{aligned} \int_C \vec{H} \cdot d\vec{r} &= (\vec{h} \times \vec{p}) \cdot \vec{q} + (\vec{h} \times \vec{q}) \cdot \vec{r} + (\vec{h} \times \vec{r}) \cdot \vec{p} \\ &= (\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{h} + (\vec{q} \times \vec{r}) \cdot \vec{h} + (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{h} \end{aligned}$$

aufgrund der zyklischen Invarianz des Spatproduktes

↪ Übereinstimmung mit dem Ergebnis aus (i)

Linke Seite im Satz von Stokes:

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (\cos \varphi \sin \vartheta + \sin \varphi \sin \vartheta + \cos \vartheta) \sin \vartheta d\varphi d\vartheta \\ &= 0 + 0 + 2\pi \left[\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_{\vartheta=0}^{\pi/2} = \pi \end{aligned}$$

Rechte Seite:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{r}'(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi \end{aligned}$$

gleiches Resultat für die Kreisscheibe

$$A: \vec{s}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

wegen des unveränderten Randes:

$$\iint_A \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r \, d\varphi \, dr = \pi$$

(Polarkoordinaten: $dA = r \, d\varphi \, dr$)

Flussberechnung als Arbeitsintegral:

$$\int_{C_u} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_o} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

mit

$$\int_{C_u} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0$$

und

$$\int_{C_o} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin(-t) \\ -\cos(-t) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sin(-t) \\ -\cos(-t) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{r}_o'(t)} dt = 2\pi$$

$$(\sin^2 t + \cos^2 t = 1)$$

\implies Fluss durch den Mantel gleich 2π

Beispiel:

Fluss der Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ -xz \\ z \end{pmatrix}$$

nach außen durch den Zylindermantel

$$S: x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

Berechnung mit Hilfe des Satzes von Stokes als Arbeitsintegral über die Randkurven

$$C_u: \vec{r}_u(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_o: \vec{r}_o(t) = \begin{pmatrix} \cos(-t) \\ \sin(-t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

($t \in [0, 2\pi]$, entgegengesetzte Orientierung beachten)

alternative direkte Berechnung:

Gesamtfluss durch die Zylinderoberfläche null wegen $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$

\implies Fluss durch den Mantel entspricht der negativen Summe der Flüsse durch Boden und Deckel

$\vec{n} \parallel \vec{e}_z \implies$ nur z-Komponente der Rotation relevant

$$(\operatorname{rot} \vec{F})_z = \partial_x(-xz) - \partial_y(yz) = -2z$$

Fluss durch den Boden ($z = 0$) null

Fluss durch den Deckel A ($z = 1$):

$$\iint_A (-2) \, dA = -2 \operatorname{area} A = -2\pi$$

\implies Fluss durch den Mantel gleich 2π

Beispiel:

wirbelförmige Strömung um die z-Achse

$$\vec{F} = \underbrace{f(\varrho)}_{F_\varphi} \vec{e}_\varphi, \quad \vec{e}_\varphi = \frac{1}{\varrho} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Formel für die Rotation in Zylinderkoordinaten \rightsquigarrow

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= (-\partial_z F_\varphi) \vec{e}_\varrho + 0 \cdot \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\varrho} (\partial_\varrho (\varrho F_\varphi)) \vec{e}_z \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f' + \varrho^{-1} f \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Potential

Gilt

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U,$$

so bezeichnet man U als Potential des Vektorfeldes \vec{F} .

Für ein solches Gradientenfeld ist das Arbeitsintegral wegunabhängig und kann als Potentialdifferenz berechnet werden. Für jeden Weg

$$C : t \mapsto \vec{r}(t), \quad t \in [a, b],$$

von $P : \vec{p} = \vec{r}(a)$ nach $Q : \vec{q} = \vec{r}(b)$ gilt

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(Q) - U(P),$$

wobei in Anlehnung an die Schreibweise einer Stammfunktion für $U(Q) - U(P)$ auch $[U]_P^Q$ geschrieben wird.

Insbesondere ist $\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ für geschlossene Wege C .

(i) Fluss von $\operatorname{rot} \vec{F}$ durch die Kreisscheibe $A: x^2 + y^2 \leq R^2$ nach oben:
Satz von Stokes \rightsquigarrow Arbeitsintegral über die Randkurve

$$C : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

d.h.

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^{2\pi} f(R) \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{\vec{e}_\varphi} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix}}_{d\vec{r}} dt = 2\pi R f(R) \end{aligned}$$

(ii) Fluss von $\operatorname{rot} \vec{F}$ durch das Rechteck $S = [-a, a] \times [-b, b]$ nach oben
im Spezialfall $f(\varrho) = \varrho$:

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dS = 8ab$$

Beweis:

setze $\psi(t) = U(\vec{r}(t))$

Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung \implies

$$U(Q) - U(P) = \psi(b) - \psi(a) = \int_a^b \frac{d}{dt} \psi(t) dt$$

Kettenregel \implies

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = \operatorname{grad} U \cdot \vec{r}'(t)$$

und wegen $\operatorname{grad} U = \vec{F}$

$$\int_a^b \frac{d}{dt} \psi(t) dt = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Beispiel:

Vektorfeld und Potential

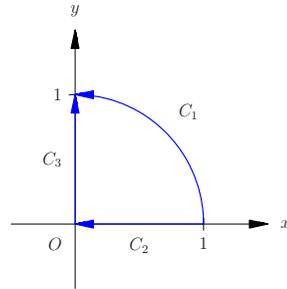
$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \text{grad } U(x, y), \quad U = (x^2 - y^2)/2$$

Wege

$$C_1: \vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi/2],$$

$$C_2: \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1],$$

$$C_3: \vec{r}_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1],$$



(i) Arbeitsintegral von (1, 0) nach (0, 1) entlang C_1 :

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{\pi/2} -2 \sin t \cos t dt \\ &= [\cos^2 t]_0^{\pi/2} = -1 \end{aligned}$$

(ii) Arbeitsintegral entlang von $C_2 + C_3$:

$$\begin{aligned} \int_{C_2+C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 -1 dt = -1 \end{aligned}$$

(iii) Verichtete Arbeit als Potentialdifferenz:

$$U(x, y) = (x^2 - y^2)/2 \implies$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(0, 1) - U(1, 0) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

für beliebige Wege C von (1, 0) nach (0, 1)

\rightsquigarrow Grund für die Übereinstimmung der Arbeitsintegrale entlang von C_1 und $C_2 + C_3$

Beispiel:

Potential eines radialsymmetrischen Vektorfeldes

$$\vec{F} = \varphi(r)\vec{e}_r \implies U = \Phi(r), \quad \Phi' = \varphi$$

Überprüfung mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} \partial_x \Phi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) &= \underbrace{\Phi'}_{\varphi}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)(2x) \\ &= \varphi(r)x/r \end{aligned}$$

analog: $\partial_y \Phi = \varphi y/r$, $\partial_z \Phi = \varphi z/r$

\rightsquigarrow

$$\text{grad } U = \varphi(r) \underbrace{(x, y, z)^t/r}_{\vec{e}_r} = \vec{F}$$

Anwendung auf das Gravitationsfeld

$$\vec{F} = \underbrace{-\gamma M m r^{-2}}_{\varphi} \vec{e}_r$$

Bilden der Stammfunktion von $\varphi \rightsquigarrow$ Potential

$$U = \gamma M m r^{-1}$$

aufgewendete Arbeit (gegen das Kraftfeld), um von einem Punkt P aus das Gravitationsfeld zu verlassen

$$-\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\left(\lim_{|\vec{q}| \rightarrow \infty} \gamma M m / |\vec{q}| - \gamma M m / |\vec{p}| \right) = \gamma M m / |\vec{p}|$$

Gleichsetzen der potentiellen und kinetischen Energie \rightsquigarrow
Startgeschwindigkeit bei einem antriebslosen Flug

$$\gamma M m / |\vec{p}| = (m/2)v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{|\vec{p}|}}$$

Gravitationskonstante: $\gamma = 6.7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$

Erdmasse: $M = 6.0 \cdot 10^{24} \text{kg}$

Erdradius: $|\vec{p}| = R = 6.4 \cdot 10^6 \text{m}$

\rightsquigarrow Fluchtgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.7 \cdot 6.0}{6.4} \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 11.2 \text{ km/s}$$

Beispiel:

Ein Elektron bewegt sich in einer Spulenwindung der Höhe h , d.h. entlang des Weges

$$C : \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, ht/(2\pi))^t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

im elektrischen Feld $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$, $r = |\vec{r}|$, das von einer Punktladung im Ursprung induziert wird.

Potential

$$U = -\frac{1}{r}, \quad \text{grad } U = \vec{F}$$

(Formel für den Gradienten in Kugelkoordinaten: $\text{grad } f(r) = f'(r) \vec{e}_r$)

Berechnung der Arbeit als Potentialdifferenz an den Endpunkten

$$\vec{r}(0) = (1, 0, 0)^t, \quad \vec{r}(2\pi) = (1, 0, h)^t$$

der Kurve C :

$$U(1, 0, h) - U(1, 0, 0) = -\frac{1}{\sqrt{1+h^2}} + 1$$

Berechnung der verrichteten Arbeit auf direktem Weg:

$\vec{e}_r = (x, y, z)^t / r$, $d\vec{r} = \vec{r}'(t) dt$ \rightsquigarrow

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \frac{\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ ht/(2\pi) \end{pmatrix}}{(\cos^2 t + \sin^2 t + h^2 t^2 / (4\pi^2))^{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ h/(2\pi) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{h^2 t / (4\pi^2)}{(1 + h^2 t^2 / (4\pi^2))^{3/2}} dt \\ &= \left[-\frac{1}{\sqrt{1 + h^2 t^2 / (4\pi^2)}} \right]_0^{2\pi} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + h^2}} \end{aligned}$$

Existenz eines Potentials

Für ein stetiges Vektorfeld \vec{F} auf einem zusammenhängenden Gebiet D existiert ein Potential U genau dann, wenn das Arbeitsintegral wegunabhängig ist.

In diesem Fall ist

$$U(P) = U(P_0) + \int_{C_P} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = \text{grad } U,$$

wobei $C_P : t \mapsto \vec{r}(t)$ ein beliebiger in D verlaufender Weg ist, der einen fest gewählten Punkt $P_0 \in D$ mit P verbindet.

Insbesondere ist U bis auf eine Konstante (den Wert $U(P_0)$) eindeutig bestimmt.

Ist das Vektorfeld \vec{F} stetig differenzierbar auf D , so ist

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$$

notwendig für die Existenz eines Potentials.

Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet D ist die Wirbelfreiheit ebenfalls hinreichend.

Beweis:

(i) Wegunabhängigkeit notwendig:

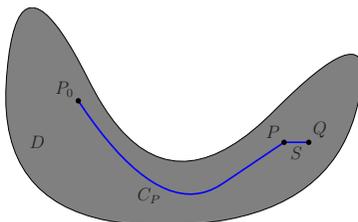
$$\vec{F} = \text{grad } U \implies$$

$$\int_C \text{grad } U \cdot d\vec{r} = U(Q) - U(P)$$

für jeden Weg $C : P \rightarrow Q$

(ii) Wegunabhängigkeit hinreichend:

setze $U(P) = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ mit $C : P_0 \rightarrow P$



zeige: $\vec{F} = \text{grad } U$

$$\vec{q} = \vec{p} + h\vec{e}_i, \quad S : P \rightarrow Q \implies$$

$$U(Q) - U(P) = \int_{C+S} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

aufgrund der Wegunabhängigkeit

Parametrisierung

$$S : \vec{r}(t) = \vec{p} + t\vec{e}_i, \quad t \in [0, h]$$

\rightsquigarrow

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^h \vec{F}(\vec{p} + t\vec{e}_i) \cdot \vec{e}_i dt = \int_0^h F_i(\vec{p} + t\vec{e}_i) dt$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung \implies

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{r} = hF_i(\vec{p} + \tau\vec{e}_i)$$

für ein $\tau \in [0, h]$

i -te Komponente des Gradienten:

$$\partial_i U(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(\vec{p} + h\vec{e}_i) - U(\vec{p})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hF_i(\vec{p} + \tau\vec{e}_i)}{h} = F_i(\vec{p})$$

(iii) Wirbelfreiheit notwendig:

$$\vec{F} = \text{grad } U \implies$$

$$\partial_i F_j - \partial_j F_i = \partial_i \partial_j U - \partial_j \partial_i U = 0$$

(alle Komponenten von $\text{rot } \vec{F}$ null)

(iv) Wirbelfreiheit hinreichend:

D einfach zusammenhängend \implies

jede geschlossene Kurve C berandet eine Fläche S in D

Satz von Stokes \implies

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

\implies Wegunabhängigkeit des Arbeitsintegrals

Beispiel:

lineares Feld

$$\vec{F} = A\vec{r}, \quad A = (a_{j,k})$$

Rotation

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} a_{3,2} - a_{2,3} \\ a_{1,3} - a_{3,1} \\ a_{2,1} - a_{1,2} \end{pmatrix}$$

Existenz eines Potentials $U \iff$ Symmetrie von A

$A = A^t \implies \vec{F} = \text{grad } U$ mit

$$U = \frac{1}{2} \vec{r}^t A \vec{r}$$

Beispiel:

Bestimmung eines Potentials U des Vektorfeldes

$$\vec{F} = (\sin y, x \cos y)^t$$

U existiert, da

$$\text{rot } \vec{F} = \partial_x(x \cos y) - \partial_y \sin y = 0$$

und \vec{F} global definiert ist (\mathbb{R}^2 ist einfach zusammenhängend)

kanonischer Weg $C_P : O \rightarrow P$:

$$\vec{r}(t) = (p_1 t, p_2 t)^t, \quad t \in [0, 1]$$

\rightsquigarrow Potential U ($\vec{F} = \text{grad } U$) mit $U(O) = 0$

$$U(P) = \int_{C_P} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} \sin(p_2 t) \\ (p_1 t) \cos(p_2 t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 p_1 \sin(p_2 t) + p_1 p_2 t \cos(p_2 t) dt = [p_1 t \sin(p_2 t)]_0^1 = p_1 \sin p_2$$

d.h. $U = x \sin y$

Beispiel:

Differenziert man das Skalarfeld

$$U = \arctan(y/x) = \varphi, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

mit der Kettenregel ($d \arctan t / dt = 1/(1+t^2)$), so erhält man das Vektorfeld

$$\vec{F} = \text{grad } U = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix} = r^{-1} \vec{e}_\varphi.$$

Die Integrabilitätsbedingung ist für $(x, y) \neq (0, 0)$ erfüllt:

$$\partial_y F_x - \partial_x F_y = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

Dennoch ist das Arbeitsintegral entlang eines Kreises $C : x^2 + y^2 = R^2$ nicht null:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \underbrace{R \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{d\vec{r}} dt = 2\pi$$

\Rightarrow \nexists global definiertes Potential
kein Widerspruch zu $\text{rot } \vec{F} = 0$, da das Definitionsgebiet von \vec{F} nicht einfach zusammenhängend ist
keine stetige (konsistente) Definition von $U = \varphi$ auf einem Kreisring um den Ursprung möglich
Ein Potential existiert (nämlich $U = \varphi$) auf jeder einfach zusammenhängenden Menge, die den Ursprung nicht enthält.

Das Potential U kann auch mit Hilfe des Arbeitsintegrals bestimmt werden. Aufgrund der Wegunabhängigkeit des Arbeitsintegrals kann ein Weg von P nach Q gewählt werden, der parallel zu den Koordinatenachsen verläuft. Wählt man den Weg, der zunächst parallel zur x -, dann parallel zur y - und zuletzt parallel zur z -Achse verläuft, ergibt sich für das Potential das Hakenintegral

$$U(Q) = U(P) + \int_{p_1}^{q_1} F_x(x, p_2, p_3) dx + \int_{p_2}^{q_2} F_y(q_1, y, p_3) dy + \int_{p_3}^{q_3} F_z(q_1, q_2, z) dz.$$

Meist ist es dabei günstig, für den festen Punkt P den Ursprung zu wählen.

Konstruktion eines Potentials

Ein Potential U für ein Vektorfeld \vec{F} ($\vec{F} = \text{grad } U$) kann durch sukzessive Integration konstruiert werden.

Bilden einer Stammfunktion bezüglich der ersten Variablen liefert

$$U(x, y, z) = \int F_x dx = U_1(x, y, z) + C_1(y, z).$$

Nun folgt aus $F_y = \partial_y U = \partial_y U_1 + \partial_y C_1$

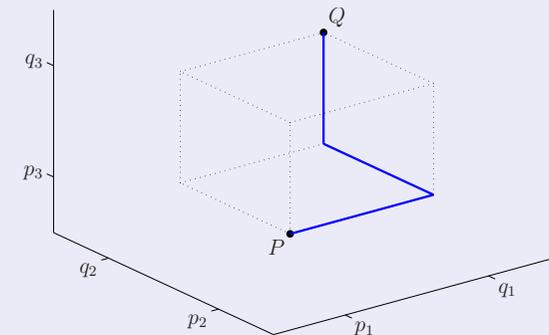
$$C_1(y, z) = \int (F_y - \partial_y U_1) dy = U_2(y, z) + C_2(z)$$

und schließlich aus $F_z = \partial_z U = \partial_z U_1 + \partial_z U_2 + \partial_z C_2$

$$C_2(z) = \int (F_z - \partial_z U_1 - \partial_z U_2) dz = U_3(z) + c.$$

Insgesamt ergibt sich

$$U = U_1(x, y, z) + U_2(y, z) + U_3(z) + c.$$



Durch Permutation der Koordinaten ergeben sich noch fünf weitere mögliche Hakenintegrale. Man wählt daraus dasjenige aus, bei dem die Integranden möglichst einfach werden.

Beweis:

Integrabilitätsbedingung $\text{rot } \vec{F} = \vec{0} \implies$

$$\partial_x [F_y - \partial_y U_1] = \partial_x F_y - \partial_y \partial_x U_1 = \partial_x F_y - \partial_y F_x = 0,$$

d.h. [...] ist nicht von x abhängig und die Definition von U_2 ist gerechtfertigt

Analog ist $[F_z - \partial_z U_1 - \partial_z U_2]$ weder von x noch von y abhängig.

$$\partial_x [F_z - \partial_z U_1 - \partial_z U_2] = \partial_x F_z - \partial_z \partial_x U_1 - \partial_z \partial_x U_2 = \partial_x F_z - \partial_z F_x - 0 = 0$$

und

$$\partial_y [F_z - \partial_z U_1 - \partial_z U_2] = \partial_y F_z - \partial_z \partial_y U_1 - \partial_z (F_y - \partial_y U_1) = 0$$

\rightsquigarrow Rechtfertigung der Definition von U_3

Integration nach $y \rightsquigarrow$

$$\int F_y - \partial_y U_1 dy = \int -2y - xz + xz dy = \underbrace{-y^2}_{U_2(y,z)} + C_2(z)$$

Integration nach $z \rightsquigarrow$

$$\int F_z - \partial_z U_1 - \partial_z U_2 dz = \int 2 + 3x - xy - 3x + xy dz = \underbrace{2z}_{U_3(z)} + c$$

Zusammenfassen der Terme \rightsquigarrow Potential

$$\begin{aligned} U &= U_1(x, y, z) + U_2(y, z) + U_3(z) + c \\ &= x^2 + 3xz - xyz - y^2 + 2z + c \end{aligned}$$

mit $c \in \mathbb{R}$

Beispiel:

Konstruktion eines Potentials U für das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x + 3z - yz \\ -2y - xz \\ 2 + 3x - xy \end{pmatrix}$$

prüfe die Integrabilitätsbedingung

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y(2 + 3x - xy) - \partial_z(-2y - xz) \\ \partial_z(2x + 3z - yz) - \partial_x(2 + 3x - xy) \\ \partial_x(-2y - xz) - \partial_y(2x + 3z - yz) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Integration von F_x nach $x \rightsquigarrow$

$$\int F_x dx = \int 2x + 3z - yz dx = \underbrace{x^2 + 3xz - xyz}_{U_1(x,y,z)} + C_1(y, z)$$

Beispiel:

parameterabhängiges Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x + \alpha x^2 y \\ x^3 + 4y^3 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Integrabilitätsbedingung \implies

$$\text{rot } \vec{F} = 3x^2 - \alpha x^2 = 0,$$

d.h. $\alpha = 3$

Bestimmung des Potentials durch sukzessive Integration:

$$\partial_x U = F_x = 2x + 3x^2 y \implies U = x^2 + x^3 y + C_1(y)$$

und

$$\partial_y U = F_y \implies x^3 + C_1'(y) = x^3 + 4y^3, \quad C_1(y) = y^4 + c$$

\rightsquigarrow Potential für \vec{F} mit $\alpha = 3$

$$U = x^2 + x^3 y + y^4 + c$$

Beispiel:

Konstruktion eines Potentials U für das wirbelfreie Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x + 3z - yz \\ -2y - xz \\ 2 + 3x - xy \end{pmatrix}$$

Potentialwert $U(O) = 0$ im Ursprung $O = (0, 0, 0)^t \rightsquigarrow$ Hakenintegral

$$\begin{aligned} U(Q) &= U(O) + \int_0^{q_1} F_x(x, 0, 0) dx + \int_0^{q_2} F_y(q_1, y, 0) dy + \int_0^{q_3} F_z(q_1, q_2, z) dz \\ &= \int_0^{q_1} 2x dx + \int_0^{q_2} -2y dy + \int_0^{q_3} 2 + 3q_1 - q_1 q_2 dz \\ &= q_1^2 - q_2^2 + 2q_3 + 3q_1 q_3 - q_1 q_2 q_3 \end{aligned}$$

Vektorpotential

Ist das Vektorfeld \vec{F} als Rotation eines Vektorfeldes \vec{A} darstellbar,

$$\vec{F} = \text{rot } \vec{A},$$

so wird \vec{A} als Vektorpotential von \vec{F} bezeichnet.

Beispiel:

Aus der Identität

$$\text{rot}(U\vec{G}) = U \text{rot } \vec{G} + (\text{grad } U) \times \vec{G}$$

erhält man für

$$U = \vec{a} \cdot \vec{r}, \quad \vec{G} = \vec{r}$$

wegen $\text{rot } \vec{r} = \vec{0}$

$$\text{rot}((\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{r}) = \vec{a} \times \vec{r}.$$

\rightsquigarrow Vektorpotential

$$\vec{A} = (\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{r}$$

für $\vec{F} = \vec{a} \times \vec{r}$

Existenz eines Vektorpotentials

Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet D besitzt ein stetig differenzierbares Vektorfeld \vec{F} genau dann ein Vektorpotential \vec{A} , wenn \vec{F} auf D quellenfrei ist:

$$\exists \vec{A} : \vec{F} = \text{rot } \vec{A} \Leftrightarrow \text{div } \vec{F} = 0.$$

Das Vektorpotential ist bis auf ein Gradientenfeld eines beliebigen Skalarfeldes U eindeutig bestimmt:

$$\text{rot } \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \implies \vec{B} = \vec{A} + \text{grad } U.$$

Wählt man U als Lösung der Poisson-Gleichung

$$-\Delta U = \text{div } \vec{A},$$

so ist $\text{div } \vec{B} = 0$, d.h. man erhält ein quellenfreies Vektorpotential. Diese spezielle Wahl wird als Eichung des Vektorpotentials bezeichnet.

Beweis:

(i) Für ein beliebiges Vektorfeld \vec{A} gilt

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = 0$$

\implies Notwendigkeit der Quellenfreiheit

(ii) definiere ein Vektorpotential \vec{A} durch

$$A_x = \frac{1}{3} \int \int (\partial_y F_y - \partial_z F_z) dy dz$$

$$A_y = \frac{1}{3} \int \int (\partial_z F_z - \partial_x F_x) dx dz$$

$$A_z = \frac{1}{3} \int \int (\partial_x F_x - \partial_y F_y) dx dy$$

zweite Komponente von $\operatorname{rot} \vec{A}$

$$\partial_z A_x - \partial_x A_z = \int (\partial_y \partial_z A_x - \partial_x \partial_y A_z) dy$$

Konstruktion eines Vektorpotentials

Für ein quellenfreies, stetig differenzierbares Vektorfeld \vec{F} lässt sich durch

$$\vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \int_{x_0}^x F_z(\xi, y, z) d\xi - \int_{z_0}^z F_x(x_0, y, \zeta) d\zeta \\ - \int_{x_0}^x F_y(\xi, y, z) d\xi \end{pmatrix}$$

ein Vektorpotential definieren, wenn die Integranden an den entsprechenden Punkten definiert sind. Dies ist zum Beispiel der Fall für einen Quader, der die Punkte (x_0, y_0, z_0) und (x, y, z) enthält. Analoge Formeln erhält man durch zyklisches Vertauschen der Variablen. Anstelle von A_x können ebenfalls A_y oder A_z null gesetzt werden.

Einsetzen der Definition von A_x und $A_z \rightsquigarrow$

$$\int (\partial_y \partial_z A_x - \partial_x \partial_y A_z) dy = \frac{1}{3} \int (\partial_y F_y \underbrace{- \partial_z F_z - \partial_x F_x}_{=\partial_y F_y} + \partial_y F_y) dy = F_y$$

$(\operatorname{div} \vec{F} = 0 \Leftrightarrow -\partial_z F_z - \partial_x F_x = \partial_y F_y)$

analog: $\partial_x A_y - \partial_y A_x = F_z$ und $\partial_y A_z - \partial_z A_y = F_x$, also $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A}$

\implies Quellenfreiheit hinreichend

(iii) Gilt

$$\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot} \vec{B},$$

so ist $\vec{A} - \vec{B}$ rotationsfrei und besitzt also ein skalares Potential U .

Beweis:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ \int_{x_0}^x F_z(\xi, y, z) d\xi - \int_{z_0}^z F_x(x_0, y, \zeta) d\zeta \\ - \int_{x_0}^x F_y(\xi, y, z) d\xi \end{pmatrix}$$

\implies

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} -\partial_y \int_{x_0}^x F_y(\xi, y, z) d\xi - \partial_z \int_{x_0}^x F_z(\xi, y, z) d\xi + \partial_z \int_{z_0}^z F_x(x_0, y, \zeta) d\zeta \\ \partial_x \int_{x_0}^x F_y(\xi, y, z) d\xi \\ \partial_x \int_{x_0}^x F_z(\xi, y, z) d\xi - \partial_x \int_{z_0}^z F_x(x_0, y, \zeta) d\zeta \end{pmatrix}$$

Vertauschung von Differentiation und Integration \rightsquigarrow

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} -\int_{x_0}^x \partial_y F_y(\xi, y, z) d\xi - \int_{x_0}^x \partial_z F_z(\xi, y, z) d\xi + F_x(x_0, y, z) \\ F_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

$$(\partial_x F_x(x_0, y, \xi) = 0)$$

$$\vec{F} \text{ quellenfrei} \implies \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z = 0$$

Einsetzen in die erste Komponente \rightsquigarrow

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \partial_x F_x(\xi, y, z) d\xi + F_x(x_0, y, z) &= [F_x(\xi, y, z)]_{\xi=x_0}^{\xi=x} + F_x(x_0, y, z) \\ &= F_x(x, y, z) \end{aligned}$$

$$\implies \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{F}$$

$$I_{xy} = \int_0^x F_y(\xi, y, z) d\xi = \int_0^x a_3 \xi - a_1 z d\xi = a_3 x^2/2 - a_1 xz$$

\rightsquigarrow Vektorpotential

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{xz} - I_{zx} \\ -I_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 xy + a_3 yz - (x^2 + z^2)a_2/2 \\ -a_3 x^2/2 + a_1 xz \end{pmatrix}$$

symmetrisches Vektorpotential:

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} a_2 xy - a_1 y^2/2 \\ a_3 yz - a_2 z^2/2 \\ a_1 zx - a_3 x^2/2 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

Konstruktion eines Vektorpotentials \vec{A} für das Vektorfeld

$$\vec{F} = \vec{a} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} a_2 z - a_3 y \\ a_3 x - a_1 z \\ a_1 y - a_2 x \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0 + 0 + 0 \implies \text{Existenz von } \vec{A}$$

Basispunkt $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0) \rightsquigarrow$

$$I_{xz} = \int_0^x F_z(\xi, y, z) d\xi = \int_0^x a_1 y - a_2 \xi d\xi = a_1 xy - a_2 x^2/2$$

$$I_{zx} = \int_0^z F_x(0, y, \zeta) d\zeta = \int_0^z a_2 \zeta - a_3 y d\zeta = a_2 z^2/2 - a_3 yz$$

Die Differenz

$$\vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} a_2 xy - a_1 y^2/2 \\ a_2 x^2/2 - a_1 xy \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist ein Gradientenfeld:

$$\vec{B} - \vec{A} = \operatorname{grad} U, \quad U = a_2 x^2 y/2 - a_1 xy^2/2$$