

Satz von Stokes

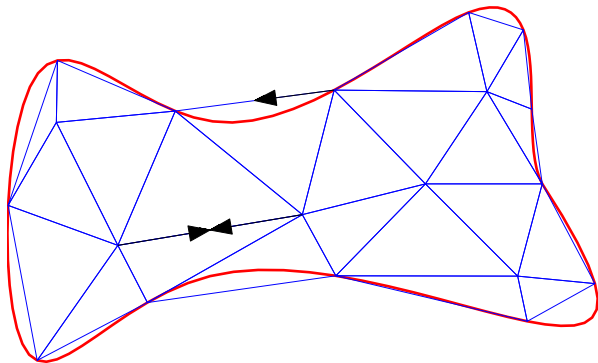
Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld \vec{F} auf einer regulären Fläche S mit orientiertem Rand C gilt

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Die Glattheitsvoraussetzungen an \vec{F} und S können abgeschwächt werden, indem man die Integrale über geeignete Grenzprozesse definiert.

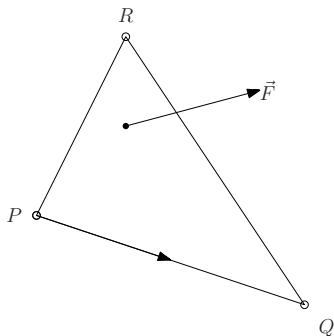
Beweisidee:

Approximation von \vec{F} durch ein stückweise lineares Vektorfeld auf einer Triangulierung von S



Aufhebung der Arbeitsintegrale im Inneren

\rightsquigarrow nur ein Dreieck zu betrachten



$\vec{F} = A\vec{x} + \vec{b}$, bestimmt durch Werte an den Eckpunkten P, Q, R

Zerlegung von A in einen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil

$$A = D + E, \quad d_{j,k} = \frac{1}{2}(a_{j,k} + a_{k,j}), \quad e_{j,k} = \frac{1}{2}(a_{j,k} - a_{k,j})$$

Der symmetrische Anteil $\vec{G} = D\vec{x} + \vec{b}$ besitzt ein Potential:

$$U = \frac{1}{2}\vec{x} \cdot (D\vec{x}) + \vec{b} \cdot \vec{x}, \quad \text{grad } U = \vec{G}$$

\rightsquigarrow Für den symmetrischen Anteil sind beide Seiten im Satz von Stokes null.

↪ betrachte nur ein antisymmetrisches Feld

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} 0 & -h_3 & h_2 \\ h_3 & 0 & -h_1 \\ -h_2 & h_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{h} \times \vec{x}$$

(i) Linke Seite $\iint_S \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S}$:

$$\text{rot } \vec{H} = \text{rot} \begin{pmatrix} -h_3x_2 + h_2x_3 \\ -h_1x_3 + h_3x_1 \\ -h_2x_1 + h_1x_2 \end{pmatrix} = 2\vec{h}$$

Normale: $(\vec{q} - \vec{p}) \times (\vec{r} - \vec{p}) / |(\vec{q} - \vec{p}) \times (\vec{r} - \vec{p})|$,

area $S = \frac{1}{2} |(\vec{q} - \vec{p}) \times (\vec{r} - \vec{p})| \implies$

$$\iint_S \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S} = \vec{h} \cdot (\vec{q} \times \vec{r} + \vec{r} \times \vec{p} + \vec{p} \times \vec{q})$$

(ii) Rechte Seite $\int_C \vec{H} \cdot d\vec{r}$:

betrachte Teilrand $C_r : \vec{p} + t(\vec{q} - \vec{p}), 0 \leq t \leq 1$

\rightsquigarrow Arbeitsintegral

$$\int_0^1 \vec{h} \times (\vec{p} + t(\vec{q} - \vec{p})) \cdot (\vec{q} - \vec{p}) dt = (\vec{h} \times \vec{p}) \cdot \vec{q}$$

(Der zweite Term verschwindet, da $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$.)

analoge Betrachtung für die Wege C_p und C_q \rightsquigarrow

$$\begin{aligned} \int_C \vec{H} \cdot d\vec{r} &= (\vec{h} \times \vec{p}) \cdot \vec{q} + (\vec{h} \times \vec{q}) \cdot \vec{r} + (\vec{h} \times \vec{r}) \cdot \vec{p} \\ &= (\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{h} + (\vec{q} \times \vec{r}) \cdot \vec{h} + (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{h} \end{aligned}$$

aufgrund der zyklischen Invarianz des Spatproduktes

\rightsquigarrow Übereinstimmung mit dem Ergebnis aus (i)

Beispiel:

Illustration des Satzes von Stokes für das Vektorfeld

$$\vec{F} = (z, x, y)^t$$

und die Halbkugelschale

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0$$

- Rotation von \vec{F}

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y y - \partial_z x \\ \partial_z z - \partial_x y \\ \partial_x x - \partial_y z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- vektorielles Flächenelement in Kugelkoordinaten

$$d\vec{S} = \vec{e}_r dS = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)^t \sin \vartheta d\varphi d\vartheta$$

- Randkurve:

$$C : t \mapsto \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)^t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Linke Seite im Satz von Stokes:

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (\cos \varphi \sin \vartheta + \sin \varphi \sin \vartheta + \cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\varphi d\vartheta \\ &= 0 + 0 + 2\pi \left[\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_{\vartheta=0}^{\pi/2} = \pi\end{aligned}$$

Rechte Seite:

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{r}'(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi\end{aligned}$$

gleiches Resultat für die Kreisscheibe

$$A: \vec{s}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

wegen des unveränderten Randes:

$$\iint_A \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r d\varphi dr = \pi$$

(Polarkoordinaten: $dA = r d\varphi dr$)

Beispiel:

Fluss der Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ -xz \\ z \end{pmatrix}$$

nach außen durch den Zylindermantel

$$S: \quad x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

Berechnung mit Hilfe des Satzes von Stokes als Arbeitsintegral über die Randkurven

$$C_u: \vec{r}_u(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_o: \vec{r}_o(t) = \begin{pmatrix} \cos(-t) \\ \sin(-t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

($t \in [0, 2\pi]$, entgegengesetzte Orientierung beachten)

Flussberechnung als Arbeitsintegral:

$$\int_{C_u} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_o} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

mit

$$\int_{C_u} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0$$

und

$$\int_{C_o} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin(-t) \\ -\cos(-t) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sin(-t) \\ -\cos(-t) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{r}'_o(t)} dt = 2\pi$$

$$(\sin^2 t + \cos^2 t = 1)$$

\implies Fluss durch den Mantel gleich 2π

alternative direkte Berechnung:

Gesamtfluss durch die Zylinderoberfläche null wegen $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$

\implies Fluss durch den Mantel entspricht der negativen Summe der Flüsse durch Boden und Deckel

$\vec{n} \parallel \vec{e}_z \implies$ nur z-Komponente der Rotation relevant

$$\left(\operatorname{rot} \vec{F}\right)_z = \partial_x(-xz) - \partial_y(yz) = -2z$$

Fluss durch den Boden ($z = 0$) null

Fluss durch den Deckel A ($z = 1$):

$$\iint_A (-2) dA = -2 \operatorname{area} A = -2\pi$$

\implies Fluss durch den Mantel gleich 2π

Beispiel:

wirbelförmige Strömung um die z-Achse

$$\vec{F} = \underbrace{f(\varrho)}_{F_\varphi} \vec{e}_\varphi, \quad \vec{e}_\varphi = \frac{1}{\varrho} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Formel für die Rotation in Zylinderkoordinaten \rightsquigarrow

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= (-\partial_z F_\varphi) \vec{e}_\varrho + 0 \cdot \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\varrho} (\partial_\varrho (\varrho F_\varphi)) \vec{e}_z \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f' + \varrho^{-1} f \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(i) Fluss von $\text{rot } \vec{F}$ durch die Kreisscheibe $A: x^2 + y^2 \leq R^2$ nach oben:
Satz von Stokes \rightsquigarrow Arbeitsintegral über die Randkurve

$$C: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

d.h.

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^{2\pi} f(R) \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{\vec{e}_\varphi} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix}}_{d\vec{r}} dt = 2\pi R f(R) \end{aligned}$$

(ii) Fluss von $\text{rot } \vec{F}$ durch das Rechteck $S = [-a, a] \times [-b, b]$ nach oben
im Spezialfall $f(\varrho) = \varrho$:

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dS = 8ab$$