Satz von Green

Für ein stetig differenzierbares bivariates Vektorfeld $\vec{F}$ auf einem regulären ebenen Bereich A mit entgegen dem Uhrzeigersinn orientierten Rand $C:\ t \mapsto \vec{r}(t)$ gilt

$$\iint\limits_A \operatorname{rot} \vec{F}\, dA = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

wobei $\operatorname{rot} \vec{F} = \partial_x F_y - \partial_y F_x$.
Diese auf Green zurückgehende Identität ist ein Spezialfall des Satzes von Stokes.

Die Glattheitsvoraussetzungen können abgeschwächt werden, indem man die Integrale über geeignete Grenzprozesse definiert.

Beweis:

Hauptsatz für zweidimensionale Integrale:

$$\iint\limits_A \partial_x g = \int\limits_C g\, \vec{n}_x^0\,, \qquad \iint\limits_A \partial_y h = \int\limits_C h\, \vec{n}_y^0$$

mit $(\vec{n}_x^0, \vec{n}_y^0)$ der nach außen gerichteten Einheitsnormalen von A

setze $g = F_y$, $h = -F_x$ und berücksichtige

$$\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{n}^0 = \vec{n}/|\vec{n}|, \quad dC = |\vec{n}(t)|\, dt$$

$\rightsquigarrow$

$$\iint\limits_A \partial_x g - \partial_y h = \int\limits_C \left(F_y \frac{y'}{|\vec{n}|} + F_x \frac{x'}{|\vec{n}|} \right) |\vec{n}|\, dt = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Beispiel:

Illustration des Satzes von Green für das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

und die Einheitskreisscheibe

$$A: \ x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

mit dem Rand

$$C: \ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

- Flächenintegral:

$$\iint\limits_A (\partial_x F_y - \partial_y F_x)\, dA = \iint\limits_A c - b\, dA = \pi(c-b)$$

- Arbeitsintegral:

$$\begin{aligned}
\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} a\cos t + b\sin t \\ c\cos t + d\sin t \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{\vec{r}\,'(t)} dt \\
&= \int\limits_0^{2\pi} -a\cos t\sin t - b\sin^2 t + c\cos^2 t + d\sin t\cos t\, dt \\
&= \pi(c-b)\,,
\end{aligned}$$

da $\int_0^{2\pi} \sin t\cos t\, dt = 0$ und $\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = 0$

Beispiel:

singuläres Vektorfeld

$$\vec{F} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

auf der Kreisscheibe

$$A:\ x^2 + y^2 \leq R, \quad R > 0$$

Rotation

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \partial_x F_y - \partial_y F_x \\ &= \frac{x^2 + y^2 - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-(x^2 + y^2) + y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

Parametrisierung des Randes C der Kreisscheibe

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Arbeitsintegral

$$\begin{aligned} \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int\limits_C F_x x' + F_y y' \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{-R \sin t}{R^2} (-R \sin t) + \frac{R \cos t}{R^2} R \cos t \, dt = 2\pi \neq 0 \end{aligned}$$

kein Widerspruch zum Satz von Green wegen der Singularität von $\vec{F}$ bei $(0, 0)$