Satz von Gauß in der Ebene

Für einen regulären ebenen Bereich A mit entgegen dem Uhrzeigersinn orientierten Rand

$$C: \; t \mapsto \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$

(Rand liegt links) gilt für ein stetig differenzierbares bivariates Vektorfeld $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$

$$\iint\limits_A \operatorname{div} \vec{F} \, dA = \int\limits_C \vec{F} \cdot \vec{n}^\circ \, dC = \int\limits_C \vec{F} \times d\vec{r},$$

wobei

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y \,, \quad \vec{F} \times d\vec{r} = \big(F_x y'(t) - F_y x'(t)\big) \; dt \,.$$

Beispiel:

Illustration des Satzes von Gauß für das ebene Vektorfeld

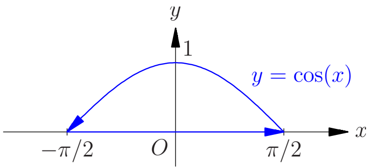
$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x - y^2 \\ xy + y \end{pmatrix}$$

über dem Bereich A, berandet von der Kurve C, die aus den zwei Kurvenstücken

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} -t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [-\pi/2, \pi/2]$$

besteht



(i) Linke Seite im Satz von Gauß:

$$\iint\limits_A \operatorname{div} \vec{F}\, dA = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \int\limits_0^{\cos x} 1 + (x+1)\, dy\, dx = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (2+x) \cos x\, dx = 4$$

(ii) Rechte Seite:
$\vec{F} \parallel d\vec{r} = (1,0)^{\mathrm{t}}\, dt$ auf $C_1 \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} \times d\vec{r} = 0$ und folglich Integration nur über C_2

$$\begin{aligned}
\int\limits_C \vec{F} \times d\vec{r} &= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{(-t - \cos^2 t)}_{F_x} \underbrace{(-\sin t)}_{y'} - \underbrace{(-t \cos t + \cos t)}_{F_y} \underbrace{(-1)}_{x'}\, dt \\
&= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} t \sin t + \cos t\, dt = [2 \sin t - t \cos t]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4
\end{aligned}$$

(Integrale von ungeraden Funktionen über $[-\pi/2, \pi/2]$ sind null.)

Flächenberechnung mit dem Satz von Gauß

Der Inhalt einer ebenen Fläche A mit entgegen dem Uhrzeigersinn orientierten Rand $C : t \mapsto \vec{r}(t)$ lässt sich durch

$$\operatorname{area}(A) = \frac{1}{2} \int\limits_C \vec{r} \times d\vec{r}$$

berechnen.

Anstatt von $\vec{r}$ kann auch ein anderes Vektorfeld $\vec{F}$ mit konstanter Divergenz verwendet werden; der Faktor $1/2$ ist dann durch den $1/\operatorname{div}\vec{F}$ zu ersetzen.

Beispiel:

Flächeninhalt des Gebiets A, das von einer Ellipse C mit Halbachsenlängen $a, b > 0$ berandet wird

Parametrisierung der Randkurve:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Flächeninhalt

$$\begin{aligned} \text{area}\, A &= \frac{1}{2}\int_C \vec{r} \times d\vec{r} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a\sin t\, dt \\ b\cos t\, dt \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} 1\, dt = \pi ab \end{aligned}$$