

Satz von Gauß

Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld \vec{F} auf einem regulären räumlichen Bereich V , der durch eine Fläche S mit nach außen orientiertem vektoriellen Flächenelement $d\vec{S}$ berandet wird, gilt

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Die Glattheitsvoraussetzungen an \vec{F} und S können abgeschwächt werden, indem man die Integrale über geeignete Grenzprozesse definiert.

Beweis:

Hauptsatz für mehrdimensionale Integrale \implies

$$\iiint_V \partial_\nu F_\nu dV = \iint_S F_\nu n_\nu^\circ dS$$

mit F_ν den Komponenten von \vec{F}

Summation über $\nu = 1, 2, 3$, $d\vec{S} = \vec{n}^\circ dS \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \sum_\nu \partial_\nu F_\nu &= \operatorname{div} \vec{F} \\ \sum_\nu F_\nu n_\nu^\circ dS &= \vec{F} \cdot \vec{n}^\circ dS = \vec{F} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

d.h. die behauptete Identität

Beispiel:

Illustration des Satzes von Gauß für die Einheitskugel

$V : r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ mit Oberfläche S und das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ xy \\ z^3 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung von Kugelkoordinaten

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta$$

Volumen- und vektorielles Flächenelement

$$\begin{aligned} dV &= r^2 \sin \vartheta \, dr d\varphi d\vartheta \\ d\vec{S} &= \underbrace{\vec{e}_r \sin \vartheta \, d\varphi d\vartheta}_{dS} \end{aligned}$$

(Radius $R = 1$)

$$(i) \quad I_V = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV:$$

Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial_x x + \partial_y xy + \partial_z z^3 = 1 + x + 3z^2$$

Darstellung mit Kugelkoordinaten \rightsquigarrow

$$I_V = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (1 + r \cos \varphi \sin \vartheta + 3r^2 \cos^2 \vartheta) \underbrace{r^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr}_{dV}$$

Produktform des zweiten und dritten Terms, $\int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi = 0 \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} I_V &= \operatorname{vol} V + 0 + 2\pi \left(\int_0^1 r^4 \, dr \right) \left(\int_0^\pi 3 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right) \\ &= \frac{4}{3}\pi + 2\pi \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_{r=0}^1 \left[-\cos^3 \vartheta \right]_{\vartheta=0}^\pi = \frac{4}{3}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{32}{15}\pi \end{aligned}$$

$$(ii) \quad I_S = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}:$$

$$\begin{aligned} F_r &= \vec{F} \cdot \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos^3 \vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \\ &= \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \sin^2 \varphi \cos \varphi \sin^3 \vartheta + \cos^4 \vartheta \end{aligned}$$

↪ Flussintegral

$$\begin{aligned} I_S &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F_r \underbrace{\sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta}_{dS} \\ &= \pi \int_0^\pi \sin \vartheta (1 - \cos^2 \vartheta) \, d\vartheta + 0 + 2\pi \int_0^\pi \cos^4 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \\ &= \pi \left([-\cos \vartheta]_0^\pi + \left[\frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \right]_0^\pi \right) + 2\pi \left[-\frac{1}{5} \cos^5 \vartheta \right]_0^\pi \\ &= 2\pi - \frac{2}{3}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{32}{15}\pi \end{aligned}$$

Beispiel:

Illustration des Satzes von Gauß für das radiale Feld $\vec{F} = r^s \vec{e}_r$ und die Kugel $V : r < R$ mit Oberfläche $S : r = R$

Formel für die Divergenz in Kugelkoordinaten \implies

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 r^s) = (s+2)r^{s-1}$$

$dV = 4\pi r^2 dr \implies$

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = 4\pi \int_0^R (s+2)r^{s+1} dr = 4\pi R^{s+2} \quad (s > -2)$$

$d\vec{S} = \vec{e}_r dS \implies$

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S R^s dS = \operatorname{area}(S) R^s = (4\pi R^2) R^s$$

Beispiel

Polyeder V mit Inkugel (berührt jede Fläche), Radius r_i

Hesse-Normalform \rightsquigarrow

$$\vec{r} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\vec{r} \cdot \vec{n}^\circ}_{=\text{const}} dS = r_i dS$$

Volumenberechnung mit dem Satz von Gauß \rightsquigarrow

$$3 \text{ vol}(V) = \iint_S \vec{r} \cdot d\vec{S} = \iint_S r_i dS = r_i \text{ area}(S)$$

- Hexaeder mit Kantenlänge a :

Oberfläche $6a^2$, Inkugelradius $\frac{a}{2}$, Volumen $a^3 = (6a^2 \cdot a/2)/3$

- Tetraeder mit Kantenlänge a :

Oberfläche $4 \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}a^2}{2} = a^2 \sqrt{3}$, Volumen $\frac{\sqrt{2}a^3}{12} \rightsquigarrow$ Inkugelradius $\frac{\sqrt{6}a}{12}$

- Kugel (Grenzfall):

Volumen $\frac{4\pi r^3}{3}$, Oberfläche $4\pi r^2 \rightsquigarrow$ korrektes Verhältnis $r : 3$