Rotation

Die Rotation eines Vektorfeldes

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

wird durch

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix}$$

definiert.
Sie ist invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen und entspricht physikalisch der Wirbeldichte des Vektorfeldes.

Benutzt man die Indexschreibweise

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{3} F_i \vec{e}_i \,,$$

so lässt sich die Rotation mit Hilfe des ε-Tensors in der Form

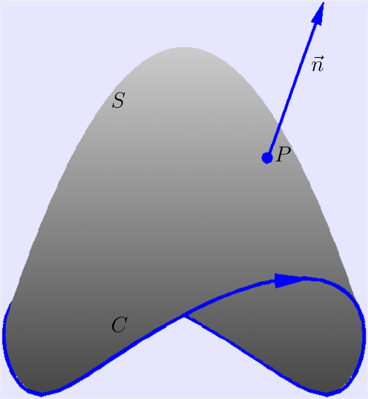
$$\left(\operatorname{rot} \vec{F}\right)_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \, \partial_j F_k$$

schreiben. Diese Definition ist unter anderem bei der Manipulation von Summen vorteilhaft.

Die normale Komponente der Rotation eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes $\vec{F}$ an einem Punkt P lässt sich als Grenzwert von Arbeitsintegralen definieren:

$$(\vec{n}^\circ \cdot \operatorname{rot} \vec{F})(P) = \lim_{\operatorname{diam} S \to 0} \frac{1}{\operatorname{area} S} \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}\,.$$

Dabei wird der Grenzwert über eine Folge regulärer Flächen S mit orientiertem Rand $C: \; t \mapsto \vec{r}(t)$ gebildet, die alle den Punkt P enthalten und dort die Normale $\vec{n}$ haben, wobei der größte Abstand zweier Flächenpunkte ($\operatorname{diam} S$) und damit auch der Fächeninhalt gegen null geht. Das Skalarprodukt auf der linken Seite wird als Wirbelstärke von $\vec{F}$ um $\vec{n}(P)$ bezeichnet und ist für $\vec{n}(P) \parallel \operatorname{rot} \vec{F}$ am größten.



Die geometrische Charakterisierung der Rotation folgt unmittelbar aus dem Satz von Stokes und dem Mittelwertsatz. Sie zeigt insbesondere, dass $\operatorname{rot} \vec{F}$ invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen ist.

Für ebene Vektorfelder $\vec{F}$ setzt man

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \partial_x F_y - \partial_y F_x \,.$$

Dies entspricht der Definition für räumliche Vektorfelder, wenn man eine zusätzliche dritte Komponente $F_z = 0$ einführt und die Rotation in $\mathbb{R}^3$ wie oben berechnet.

Beispiel:

(i) Zentrales Kraftfeld:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r\vec{e}_r, \quad \operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y z - \partial_z y \\ \partial_z x - \partial_x z \\ \partial_x y - \partial_y x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Wirbelförmige Strömung:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \varrho\vec{e}_\varphi, \quad \operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y 0 - \partial_z x \\ \partial_z(-y) - \partial_x 0 \\ \partial_x x - \partial_y(-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

Iillustration der geometrischen Definition für

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

S: Kreisscheibe in der xy-Ebene mit Rand C, d.h.

$$S:\ x^2 + y^2 \leq a^2, \quad C:\ t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$d\vec{r} = \vec{r}'(t)\,dt,\ \vec{r}'(t) = (-a\sin t,\ a\cos t,\ 0)^{\mathrm{t}} \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}\lim_{\operatorname{diam} S\to 0} \frac{1}{\operatorname{area} S} \int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \lim_{a\to 0} \frac{1}{\pi a^2} \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \lim_{a\to 0} \frac{1}{\pi a^2} \int\limits_0^{2\pi} a^2\,dt = \lim_{a\to 0} \frac{2\pi a^2}{\pi a^2} = 2\end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit

$$\vec{n}^\circ \cdot \operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$$