Rechenregeln für Differentialoperatoren

Für räumliche Vektorfelder $\vec{F}$, $\vec{G}$ und räumliche Skalarfelder U, V gelten folgende Rechenregeln.

Bei der Hintereinanderschaltung von Gradient, Divergenz und Rotation gilt

- $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = \vec{0}$
- $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$
- $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) - \Delta \vec{F}$

wobei der Laplace-Operator einer vektorwertigen Funktion komponentenweise zu interpretieren ist, d.h.

$$\Delta \vec{F} = \Delta F_x \vec{e}_x + \Delta F_y \vec{e}_y + \Delta F_z \vec{e}_z \,.$$

Bei der Differentiation von Produkten gilt

- $\operatorname{grad}(UV) = U \operatorname{grad} V + V \operatorname{grad} U$
- $\operatorname{div}(U\vec{F}) = U \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F} \cdot \operatorname{grad} U$
- $\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G}$
- $\operatorname{rot}(U\vec{F}) = U \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \times \operatorname{grad} U$

Analoge Identitäten gelten auch für ebene Felder. Formal erhält man die entsprechenden Formeln, wenn man die dritte Komponente der Felder null setzt und nur von x und y abhängige Funktionen betrachtet.

Beweis:

(i) $\quad \operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = \vec{0}$:
x-Komponente

$$\partial_y(\operatorname{grad} U)_z - \partial_z(\operatorname{grad} U)_y = \partial_y\partial_z U - \partial_z\partial_y U = 0$$

Analog verschwinden die y- und z-Komponenten.
(ii) $\quad \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$:
Definition der Rotation mit Hilfe des ε-Tensors $\quad \rightsquigarrow$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \sum_i \partial_i \sum_{j,k} \varepsilon_{i,j,k}\partial_j F_k = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{i,j,k}\partial_i\partial_j F_k$$

Vertauschung der Indizes $i, j \quad \Longrightarrow$

$$\sum_{i,j,k} \ldots = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{j,i,k} \underbrace{\partial_j\partial_i F_k}_{\partial_i\partial_j F_k} = -\sum_{i,j,k} \ldots$$

also $\operatorname{div}\operatorname{rot} \vec{F} = 0$

(iii) $\quad \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{F}) - \Delta\vec{F}$:
x-Komponente

$$\partial_y(\operatorname{rot}\vec{F})_z - \partial_z(\operatorname{rot}\vec{F})_y = (\partial_y\partial_x F_y - \partial_y\partial_y F_x) - (\partial_z\partial_z F_x - \partial_z\partial_x F_z)$$

addiere und subtrahiere den Term $\partial_x\partial_x F_x$
$\rightsquigarrow$ erste Komponente der behaupteten Formel:

$$\partial_x(\operatorname{div}\vec{F}) - \Delta F_x$$

analoge Behandlung der anderen Komponenten

(iv) $\quad \operatorname{grad}(UV) = U\operatorname{grad}V + V\operatorname{grad}U$
Produktregel $\quad\Longrightarrow$

$$\partial_k(UV) = (\partial_k U)V + U(\partial_k V)$$

(v) $\operatorname{div}(U\vec{F}) = U \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F} \cdot \operatorname{grad} U$:
Produktregel $\implies$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(U\vec{F}) &= \partial_x(UF_x) + \partial_y(UF_y) + \partial_z(UF_z) \\
&= U\partial_x F_x + U\partial_y F_y + U\partial_z F_z + F_x\partial_x U + F_y\partial_y U + F_z\partial_z U \\
&= U \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F} \cdot \operatorname{grad} U
\end{aligned}$$

(vi) $\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G}$:
Definition des Kreuzproduktes und Produktregel $\leadsto$

$$\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{i,j,k} \left((\partial_i F_j)G_k + [F_j(\partial_i G_k)]\right)$$

Zyklizität von ε und Vertauschung von i, j im zweiten Term $[\ldots]$ $\leadsto$

$$\sum_{i,j,k} \varepsilon_{k,i,j} G_k \partial_i F_j + \sum_{i,j,k} \underbrace{\varepsilon_{j,i,k}}_{-\varepsilon_{i,j,k}} F_i \partial_j G_k$$

$\leadsto$ behauptete Formel

(vii) $\quad \operatorname{rot}(U\vec{F}) = U \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \times \operatorname{grad} U$:
x-Komponente von $\operatorname{rot}(U\vec{F})$,

$$\partial_y(UF_z) - \partial_z(UF_y) = (\partial_y U)F_z - (\partial_z U)F_y + U\partial_y F_z - U\partial_z F_y\,,$$

entspricht x-Komponente von

$$U \operatorname{rot} \vec{F} + (\operatorname{grad} U) \times \vec{F}$$

zyklische Vertauschung $\quad\rightsquigarrow\quad$ behauptete Identität

Beispiel:

illustriere die Identität $\operatorname{rot}(U\vec{F}) = U \operatorname{rot}\vec{F} - \vec{F} \times \operatorname{grad} U$ für

$$U = z, \quad \vec{F} = (-y,\, x,\, 1)^{\mathrm{t}}$$

(i) Linke Seite:

$$\operatorname{rot}(U\vec{F}) = \operatorname{rot}\begin{pmatrix} -yz \\ xz \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - x \\ -y - 0 \\ z + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 2z \end{pmatrix}$$

(ii) Rechte Seite:

$$\begin{aligned} U \operatorname{rot}\vec{F} - \vec{F} \times \operatorname{grad} U &= z \operatorname{rot}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \times \operatorname{grad} z \\ &= z \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 1+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel:

Illustration der Identität $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{F}) - \Delta\vec{F}$ für das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 z \\ y^2 x \\ z^2 y \end{pmatrix}$$

(i) Linke Seite:

$$\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\begin{pmatrix} x^2 z \\ y^2 x \\ z^2 y \end{pmatrix}\right) = \operatorname{rot}\begin{pmatrix} z^2 - 0 \\ x^2 - 0 \\ y^2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 2z \\ 2x \end{pmatrix}$$

(ii) Rechte Seite:

$$\operatorname{grad}(2xz+2yx+2zy) - \begin{pmatrix} \Delta x^2 z \\ \Delta y^2 x \\ \Delta z^2 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z + 2y \\ 2x + 2z \\ 2y + 2x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2z \\ 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 2z \\ 2x \end{pmatrix}$$