Potential

Gilt

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U\,,$$

so bezeichnet man U als Potential des Vektorfeldes $\vec{F}$.
Für ein solches Gradientenfeld ist das Arbeitsintegral wegunabhängig und kann als Potentialdifferenz berechnet werden. Für jeden Weg

$$C:\ t \mapsto \vec{r}(t), \quad t \in [a, b]\,,$$

von $P : \vec{p} = \vec{r}(a)$ nach $Q : \vec{q} = \vec{r}(b)$ gilt

$$\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(Q) - U(P)\,,$$

wobei in Anlehnung an die Schreibweise einer Stammfunktion für $U(Q) - U(P)$ auch $[U]_P^Q$ geschrieben wird.
Insbesondere ist $\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ für geschlossene Wege C.

Beweis:

setze $\psi(t) = U(\vec{r}(t))$

Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung $\Longrightarrow$

$$U(Q) - U(P) = \psi(b) - \psi(a) = \int_a^b \frac{d}{dt}\,\psi(t)\,dt$$

Kettenregel $\Longrightarrow$

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = \operatorname{grad} U \cdot \vec{r}\,'(t)$$

und wegen grad $U = \vec{F}$

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\,\psi(t)\,dt = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

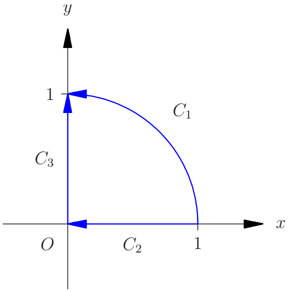
Beispiel:

Vektorfeld und Potential

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \operatorname{grad} U(x,y), \quad U = (x^2 - y^2)/2$$

Wege

$$\begin{aligned} C_1: \quad \vec{r}_1(t) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi/2], \\ C_2: \quad \vec{r}_2(t) &= \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1], \\ C_3: \quad \vec{r}_3(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1], \end{aligned}$$



(i) Arbeitsintegral von $(1,0)$ nach $(0,1)$ entlang C_1:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int\limits_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int\limits_0^{\pi/2} -2\sin t\cos t\, dt \\
&= [\cos^2 t]_0^{\pi/2} = -1
\end{aligned}$$

(ii) Arbeitsintegral entlang von $C_2 + C_3$:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{C_2+C_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int\limits_0^{1} \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int\limits_0^{1} \begin{pmatrix} 0 \\ -t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int\limits_0^{1} -1\, dt = -1
\end{aligned}$$

(iii) Verichtete Arbeit als Potentialdifferenz:
$U(x, y) = (x^2 - y^2)/2 \implies$

$$\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(0,1) - U(1,0) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

für beliebige Wege C von $(1,0)$ nach $(0,1)$
$\rightsquigarrow$ Grund für die Übereinstimmung der Arbeitsintegrale entlang von C_1 und $C_2 + C_3$

Beispiel:

Potential eines radialsymmetrischen Vektorfeldes

$$\vec{F} = \varphi(r)\vec{e}_r \quad \Longrightarrow \quad U = \Phi(r),\ \Phi' = \varphi$$

Überprüfung mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} \partial_x \Phi(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) &= \underbrace{\Phi'}_{\varphi}(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)(2x) \\ &= \varphi(r)\,x/r \end{aligned}$$

analog: $\partial_y \Phi = \varphi\, y/r$, $\partial_z \Phi = \varphi\, z/r$

$\rightsquigarrow$

$$\operatorname{grad} U = \varphi(r)\,\underbrace{(x,\ y,\ z)^{\mathrm{t}}/r}_{\vec{e}_r} = \vec{F}$$

Anwendung auf das Gravitationsfeld

$$\vec{F} = \underbrace{-\gamma M m r^{-2}}_{\varphi} \vec{e}_r$$

Bilden der Stammfunktion von φ $\quad\rightsquigarrow\quad$ Potential

$$U = \gamma M m r^{-1}$$

aufgewendete Arbeit (gegen das Kraftfeld), um von einem Punkt P aus das Gravitationsfeld zu verlassen

$$-\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\left(\lim_{|\vec{q}|\to\infty} \gamma M m/|\vec{q}| - \gamma M m/|\vec{p}|\right) = \gamma M m/|\vec{p}|$$

Gleichsetzen der potentiellen und kinetischen Energie $\quad\rightsquigarrow$ Startgeschwindigkeit bei einem antriebslosen Flug

$$\gamma M m/|\vec{p}| = (m/2)v^2 \quad\Longrightarrow\quad v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{|\vec{p}|}}$$

Gravitationskonstante: $\gamma = 6.7 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2}$
Erdmasse: $M = 6.0 \cdot 10^{24}\mathrm{kg}$
Erdradius: $|\vec{p}| = R = 6.4 \cdot 10^6\mathrm{m}$
$\rightsquigarrow$ Fluchtgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.7 \cdot 6.0}{6.4} \cdot 10^7}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 11.2\,\mathrm{km/s}$$

Beispiel:

Ein Elektron bewegt sich in einer Spulenwindung der Höhe h, d.h. entlang des Weges

$$C: \; \vec{r}(t) = (\cos t,\, \sin t,\, ht/(2\pi))^{\mathrm{t}}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

im elektrischen Feld $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\vec{e}_r$, $r = |\vec{r}|$, das von einer Punktladung im Ursprung induziert wird.

Potential

$$U = -\frac{1}{r}, \quad \operatorname{grad} U = \vec{F}$$

(Formel für den Gradienten in Kugelkoordinaten: grad $f(r) = f'(r)\vec{e}_r$)

Berechnung der Arbeit als Potentialdifferenz an den Endpunkten

$$\vec{r}(0) = (1,\, 0,\, 0)^{\mathrm{t}}, \quad \vec{r}(2\pi) = (1,\, 0,\, h)^{\mathrm{t}}$$

der Kurve C:

$$U(1, 0, h) - U(1, 0, 0) = -\frac{1}{\sqrt{1 + h^2}} + 1$$

Berechnung der verrichteten Arbeit auf direktem Weg:
$\vec{e}_r = (x,\, y,\, z)^{\mathrm{t}}/r,\; d\vec{r} = \vec{r}\,'(t)\, dt \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ ht/(2\pi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ h/(2\pi) \end{pmatrix}}{(\cos^2 t + \sin^2 t + h^2 t^2/(4\pi^2))^{3/2}}\, dt \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \frac{h^2 t/(4\pi^2)}{(1 + h^2 t^2/(4\pi^2))^{3/2}}\, dt \\
&= \left[-\frac{1}{\sqrt{1 + h^2 t^2/(4\pi^2)}} \right]_0^{2\pi} \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + h^2}}
\end{aligned}$$