Konstruktion eines Vektorpotentials

Für ein quellenfreies, stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{F}$ lässt sich durch

$$\vec{A}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \int\limits_{x_0}^{x} F_z(\xi,y,z)\,d\xi - \int\limits_{z_0}^{z} F_x(x_0,y,\zeta)\,d\zeta \\ -\int\limits_{x_0}^{x} F_y(\xi,y,z)\,d\xi \end{pmatrix}$$

ein Vektorpotential definieren, wenn die Integranden an den entsprechenden Punkten definiert sind. Dies ist zum Beispiel der Fall für einen Quader, der die Punkte (x_0, y_0, z_0) und (x, y, z) enthält.
Analoge Formeln erhält man durch zyklisches Vertauschen der Variablen.
Anstelle von A_x können ebenfalls A_y oder A_z null gesetzt werden.

Beweis:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ \int\limits_{x_0}^{x} F_z(\xi, y, z)\, d\xi - \int\limits_{z_0}^{z} F_x(x_0, y, \zeta)\, d\zeta \\ -\int\limits_{x_0}^{x} F_y(\xi, y, z)\, d\xi \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} -\partial_y \int\limits_{x_0}^{x} F_y(\xi, y, z)\, d\xi - \partial_z \int\limits_{x_0}^{x} F_z(\xi, y, z)\, d\xi + \partial_z \int\limits_{z_0}^{z} F_x(x_0, y, \zeta)\, d\zeta \\ \partial_x \int\limits_{x_0}^{x} F_y(\xi, y, z)\, d\xi \\ \partial_x \int\limits_{x_0}^{x} F_z(\xi, y, z)\, d\xi - \partial_x \int\limits_{z_0}^{z} F_x(x_0, y, \zeta)\, d\zeta \end{pmatrix}$$

Vertauschung von Differentiation und Integration $\rightsquigarrow$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{pmatrix} -\int\limits_{x_0}^{x} \partial_y F_y(\xi, y, z)\, d\xi - \int\limits_{x_0}^{x} \partial_z F_z(\xi, y, z)\, d\xi + F_x(x_0, y, z) \\ F_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

$(\partial_x F_x(x_0, y, \xi) = 0)$

$\vec{F}$ quellenfrei $\implies$ $\partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z = 0$

Einsetzen in die erste Komponente $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} \partial_x F_x(\xi, y, z)\, d\xi + F_x(x_0, y, z) &= [F_x(\xi, y, z)]_{\xi=x_0}^{\xi=x} + F_x(x_0, y, z) \\ &= F_x(x, y, z) \end{aligned}$$

$\implies$ $\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{F}$

Beispiel:

Konstruktion eines Vektorpotentials $\vec{A}$ für das Vektorfeld

$$\vec{F} = \vec{a} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} a_2 z - a_3 y \\ a_3 x - a_1 z \\ a_1 y - a_2 x \end{pmatrix}$$

$\operatorname{div} \vec{F} = 0 + 0 + 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Existenz von $\vec{A}$
Basispunkt $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0) \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} I_{xz} = \int_0^x F_z(\xi, y, z)\, d\xi &= \int_0^x a_1 y - a_2 \xi \, d\xi = a_1 xy - a_2 x^2/2 \\ I_{zx} = \int_0^z F_x(0, y, \zeta)\, d\zeta &= \int_0^z a_2 \zeta - a_3 y \, d\zeta = a_2 z^2/2 - a_3 yz \end{aligned}$$

$$I_{xy} = \int_0^x F_y(\xi, y, z)\, d\xi \quad = \quad \int_0^x a_3\xi - a_1 z\, d\xi = a_3 x^2/2 - a_1 xz$$

$\rightsquigarrow$ Vektorpotential

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{xz} - I_{zx} \\ -I_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 xy + a_3 yz - (x^2 + z^2) a_2/2 \\ -a_3 x^2/2 + a_1 xz \end{pmatrix}$$

symmetrisches Vektorpotential:

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} a_2 xy - a_1 y^2/2 \\ a_3 yz - a_2 z^2/2 \\ a_1 zx - a_3 x^2/2 \end{pmatrix}$$

Die Differenz

$$\vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} a_2 xy - a_1 y^2/2 \\ a_2 x^2/2 - a_1 xy \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist ein Gradientenfeld:

$$\vec{B} - \vec{A} = \operatorname{grad} U, \quad U = a_2 x^2 y/2 - a_1 x y^2/2$$