Konstruktion eines Potentials

Ein Potential U für ein Vektorfeld $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad} U$) kann durch sukzessive Integration konstruiert werden.
Bilden einer Stammfunktion bezüglich der ersten Variablen liefert

$$U(x, y, z) = \int F_x dx = U_1(x, y, z) + C_1(y, z)\,.$$

Nun folgt aus $F_y = \partial_y U = \partial_y U_1 + \partial_y C_1$

$$C_1(y, z) = \int \left(F_y - \partial_y U_1\right)\, dy = U_2(y, z) + C_2(z)$$

und schließlich aus $F_z = \partial_z U = \partial_z U_1 + \partial_z U_2 + \partial_z C_2$

$$C_2(z) = \int \left(F_z - \partial_z U_1 - \partial_z U_2\right)\, dz = U_3(z) + c\,.$$

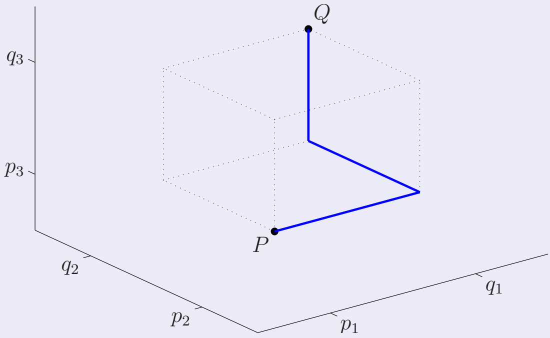
Insgesamt ergibt sich

$$U = U_1(x, y, z) + U_2(y, z) + U_3(z) + c\,.$$

Das Potential U kann auch mit Hilfe des Arbeitsintegrals bestimmt werden. Aufgrund der Wegunabhängigkeit des Arbeitsintegrals kann ein Weg von P nach Q gewählt werden, der parallel zu den Koordinatenachsen verläuft. Wählt man den Weg, der zunächst parallel zur x-, dann parallel zur y- und zuletzt parallel zur z-Achse verläuft, ergibt sich für das Potential das Hakenintegral

$$U(Q) = U(P) + \int_{p_1}^{q_1} F_x(x, p_2, p_3)\, dx + \int_{p_2}^{q_2} F_y(q_1, y, p_3)\, dy + \int_{p_3}^{q_3} F_z(q_1, q_2, z)\, dz\,.$$

Meist ist es dabei günstig, für den festen Punkt P den Ursprung zu wählen.



Durch Permutation der Koordinaten ergeben sich noch fünf weitere mögliche Hakenintegrale. Man wählt daraus dasjenige aus, bei dem die Integranden möglichst einfach werden.

Beweis:

Integrabilitätsbedingung rot $\vec{F} = \vec{0} \quad \Longrightarrow$

$$\partial_x \left[F_y - \partial_y U_1\right] = \partial_x F_y - \partial_y \partial_x U_1 = \partial_x F_y - \partial_y F_x = 0\,,$$

d.h. $[\ldots]$ ist nicht von x abhängig und die Definition von U_2 ist gerechtfertigt

Analog ist $[F_z - \partial_z U_1 - \partial_z U_2]$ weder von x noch von y abhängig.

$$\partial_x \left[F_z - \partial_z U_1 - \partial_z U_2\right] = \partial_x F_z - \partial_z \partial_x U_1 - \partial_z \partial_x U_2 = \partial_x F_z - \partial_z F_x - 0 = 0$$

und

$$\partial_y \left[F_z - \partial_z U_1 - \partial_z U_2\right] = \partial_y F_z - \partial_z \partial_y U_1 - \partial_z (F_y - \partial_y U_1) = 0$$

$\rightsquigarrow$ Rechtfertigung der Definition von U_3

Beispiel:

Konstruktion eines Potentials U für das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x + 3z - yz \\ -2y - xz \\ 2 + 3x - xy \end{pmatrix}$$

prüfe die Integrabilitätsbedingung

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y(2 + 3x - xy) & - & \partial_z(-2y - xz) \\ \partial_z(2x + 3z - yz) & - & \partial_x(2 + 3x - xy) \\ \partial_x(-2y - xz) & - & \partial_y(2x + 3z - yz) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Integration von F_x nach x $\quad \rightsquigarrow$

$$\int F_x \, dx = \int 2x + 3z - yz \, dx = \underbrace{x^2 + 3xz - xyz}_{U_1(x,y,z)} + C_1(y, z)$$

Integration nach y $\quad\rightsquigarrow$

$$\int F_y - \partial_y U_1 \, dy = \int -2y - xz + xz \, dy = \underbrace{-y^2}_{U_2(y,z)} + C_2(z)$$

Integration nach z $\quad\rightsquigarrow$

$$\int F_z - \partial_z U_1 - \partial_z U_2 \, dz = \int 2 + 3x - xy - 3x + xy \, dz = \underbrace{2z}_{U_3(z)} + c$$

Zusammenfassen der Terme $\quad\rightsquigarrow\quad$ Potential

$$\begin{aligned} U &= U_1(x,y,z) + U_2(y,z) + U_3(z) + c \\ &= x^2 + 3xz - xyz - y^2 + 2z + c \end{aligned}$$

mit $c \in \mathbb{R}$

Beispiel:

parameterabhängiges Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x + \alpha x^2 y \\ x^3 + 4y^3 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Integrabilitätsbedingung $\quad \Longrightarrow$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = 3x^2 - \alpha x^2 = 0\,,$$

d.h. $\alpha = 3$

Bestimmung des Potentials durch sukzessive Integration:

$$\partial_x U = F_x = 2x + 3x^2 y \quad \Longrightarrow \quad U = x^2 + x^3 y + C_1(y)$$

und

$$\partial_y U = F_y \quad \Longrightarrow \quad x^3 + C_1'(y) = x^3 + 4y^3, \quad C_1(y) = y^4 + c$$

$\leadsto \quad$ Potential für $\vec{F}$ mit $\alpha = 3$

$$U = x^2 + x^3 y + y^4 + c$$

Beispiel:

Konstruktion eines Potentials U für das wirbelfreie Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x + 3z - yz \\ -2y - xz \\ 2 + 3x - xy \end{pmatrix}$$

Potentialwert $U(O) = 0$ im Ursprung $O = (0,0,0)^{\mathrm{t}}$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ Hakenintegral

$$\begin{aligned} U(Q) &= U(O) + \int_0^{q_1} F_x(x,0,0)\,dx + \int_0^{q_2} F_y(q_1,y,0)\,dy + \int_0^{q_3} F_z(q_1,q_2,z)\,dz \\ &= \int_0^{q_1} 2x\,dx + \int_0^{q_2} -2y\,dy + \int_0^{q_3} 2 + 3q_1 - q_1 q_2\,dz \\ &= q_1^2 - q_2^2 + 2q_3 + 3q_1 q_3 - q_1 q_2 q_3 \end{aligned}$$