Flussintegral

Der Fluss eines stetigen Vektorfeldes $\vec{F}$ durch eine Fläche S mit regulärer Parametrisierung

$$D \ni (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \in S$$

in Richtung der Normalen

$$\vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}$$

ist

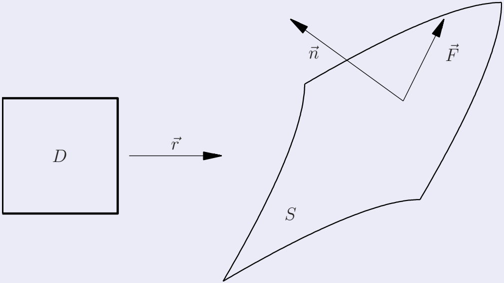
$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}^{\circ} \, dS = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) \, dudv\,.$$

Man bezeichnet dabei

$$d\vec{S} = \vec{n}^\circ\, dS\,, \quad dS = |\vec{n}(u,v)|\, dudv\,,$$

als vektorielles Flächenelement.

Bei gleicher Orientierung des Normalenvektors ist das Flussintegral unabhängig von der gewählten Parametrisierung.
Die Umkehrung der Normalenrichtung bewirkt eine Änderung des Vorzeichens.



Die Glattheitsvoraussetzungen an $\vec{F}$ und $\vec{r}(u, v)$ können abgeschwächt werden, indem man das Integral über einen geeigneten Grenzprozess definiert.

Beispiel:

Fluss des Vektorfeldes $\vec{F} = (x,\,1,\,yz)^{\mathrm{t}}$ durch die Fläche

$$S:\ \vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u^2 \\ u+v \\ v^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le u, v \le 1$$

partielle Ableitungen

$$\partial_u \vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} 2u \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_v \vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Normale (z-Komponente positiv gewählt, Fluss nach oben)

$$\vec{n}(u,v) = \partial_u \vec{r}(u,v) \times \partial_v \vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} 2v \\ -4uv \\ 2u \end{pmatrix}$$

Fluss von $\vec{F}$ durch S

$$\begin{aligned}\iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S} &= \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \begin{pmatrix} u^2 \\ 1 \\ uv^2+v^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2v \\ -4uv \\ 2u \end{pmatrix} du\,dv \\ &= \int\limits_0^1\int\limits_0^1 2u^2v - 4uv + 2u^2v^2 + 2uv^3\,du\,dv\end{aligned}$$

$\int_0^1\int_0^1 u^\alpha v^\beta\,dudv = (\alpha+1)^{-1}(\beta+1)^{-1} \quad \rightsquigarrow$

$$2\frac{1}{3}\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2}\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3}\frac{1}{3} + 2\frac{1}{2}\frac{1}{4} = -\frac{7}{36}$$