Fluss durch einen Zylindermantel

Der Fluss eines Vektorfeldes

$$\vec{F} = F_\varrho \vec{e}_\varrho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$$

nach außen durch den Mantel eines Zylinders mit Randkurve $\varrho = \varrho(\varphi)$ ist

$$\int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho \varrho - F_\varphi \partial_\varphi \varrho \; dz \, d\varphi \, .$$

Der Fluss des Vektorfeldes durch eine Rotationsfläche, die durch Drehung der Kurve $\varrho = \varrho(z)$ um die z-Achse entsteht, ist

$$\int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho \varrho - F_z \varrho \partial_z \varrho \; dz \, d\varphi \, .$$

Der Fluss durch den Mantel eines Kreiszylinders mit $\varrho = a$ ist demnach

$$a \int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho \, dz \, d\varphi \, ,$$

d.h. nur die axialsymmetrische Komponente des Feldes liefert einen Beitrag.
Insbesondere ist beim Kreiszylinder der Fluss für ein axialsymmetrisches Feld $\vec{F} = f(\varrho)\vec{e}_\varrho$ gleich $2\pi a(z_{\max} - z_{\min})f(a)$.

Beweis:

Darstellung des Vektorfeldes und Parametrisierung der Mantelfläche in Zylinderkoordinaten

$$\vec{F} = F_\varrho \vec{e}_\varrho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z, \quad S:\ \vec{r}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} \varrho\cos\varphi \\ \varrho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

(i) $\quad \varrho = \varrho(\varphi)$:
nach außen gerichtete Flächennormale

$$\begin{aligned} \vec{n}(\varphi, z) = \partial_\varphi \vec{r} \times \partial_z \vec{r} \quad &= \quad \begin{pmatrix} \partial_\varphi \varrho \cos\varphi - \varrho\sin\varphi \\ \partial_\varphi \varrho \sin\varphi + \varrho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \quad \begin{pmatrix} \partial_\varphi \varrho \sin\varphi + \varrho\cos\varphi \\ -\partial_\varphi \varrho \cos\varphi + \varrho\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\partial_\varphi \varrho\, \vec{e}_\varphi + \varrho \vec{e}_\varrho \end{aligned}$$

Orthogonalität der Basisvektoren $\vec{e}_\varrho,\ \vec{e}_\varphi,\ \vec{e}_z \quad \rightsquigarrow \quad \vec{F}\cdot\vec{n} = F_\varrho \varrho - F_\varphi \partial_\varphi \varrho$

(ii) $\varrho = \varrho(z)$:
nach außen gerichtete Flächennormale

$$\begin{aligned}\vec{n}(\varphi, z) = \partial_\varphi \vec{r} \times \partial_z \vec{r} &= \begin{pmatrix} -\varrho \sin\varphi \\ \varrho \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_z \varrho \cos\varphi \\ \partial_z \varrho \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varrho \cos\varphi \\ \varrho \sin\varphi \\ -\varrho \partial_z \varrho \end{pmatrix} = \varrho \vec{e}_\varrho - \varrho \partial_z \varrho \vec{e}_z\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Feldkomponente in Normalenrichtung

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = F_\varrho \varrho - F_z \varrho \partial_z \varrho$$

ϱ konstant für einen Kreiszylinder
$\rightsquigarrow$ Verschwinden der Terme mit Ableitungen von ϱ

Beispiel:

Fluss des Feldes

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} xz^2 \\ yz^2 \\ (x^2 + y^2)z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho z^2 \cos\varphi \\ \varrho z^2 \sin\varphi \\ \varrho^2 z \end{pmatrix}$$

von innen nach außen durch den Mantel eines Zylinders mit Abstand a zur z-Achse und $z_{\mathrm{min}} = 0$, $z_{\mathrm{max}} = b$
normale Feldkomponente

$$F_\varrho = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \varrho z^2 \cos\varphi \\ \varrho z^2 \sin\varphi \\ \varrho^2 z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \varrho z^2$$

Fluss

$$a \int_0^{2\pi} \int_{z_{\mathrm{min}}}^{z_{\mathrm{max}}} F_\varrho(a, \varphi, z)\, dz\, d\varphi = a \int_0^{2\pi} \int_0^b a z^2\, dz\, d\varphi = \frac{1}{3} a^2 b^3 \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3} \pi a^2 b^3$$

Beispiel:

Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \varrho \vec{e}_\varrho + z \vec{e}_z$$

nach außen durch einen Zylindermantel, der durch die Kardioide $\varrho(\varphi) = 1 - \cos\varphi$ im Bereich $z \in [0, a]$ erzeugt wird

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a F_\varrho \varrho - F_\varphi \partial_\varphi \varrho \, dz \, d\varphi$$

$F_\varrho = \varrho\,,\ F_\varphi = 0 \quad \Longrightarrow$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \varrho^2(\varphi) \, dz \, d\varphi = a \int_0^{2\pi} (1 - \cos\varphi)^2 \, d\varphi = a \left(2\pi + 0 + \frac{2\pi}{2} \right) = 3\pi a$$