Fluss durch einen Funktionsgraph

Der Fluss eines stetigen Vektorfeldes $\vec{F}$ nach oben (positive z-Komponente der Normalen) durch den Graph S einer differenzierbaren skalaren Funktion $z = f(x, y)$ über dem Definitionsgebiet $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ist

$$\iint\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_D -F_x \partial_x f - F_y \partial_y f + F_z \, dxdy \, .$$

Beweis:

$$S:\ (u,v) \to \vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix}$$

partielle Ableitungen und Normale mit positiver z-Komponente

$$\partial_u \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_u f \end{pmatrix},\ \partial_v \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_v f \end{pmatrix}, \quad \vec{n}(u,v) = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r} = \begin{pmatrix} -\partial_u f \\ -\partial_v f \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Fluss

$$\begin{aligned} \iint\limits_D \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \vec{n}(u,v)\, dudv &= \iint\limits_D \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\partial_u f \\ -\partial_v f \\ 1 \end{pmatrix} dudv \\ &= \iint\limits_D -F_x \partial_u f - F_y \partial_v f + F_z\, dudv \end{aligned}$$

Beispiel:

Fluss des Vektorfeldes $\vec{F} = (x,\ 1,\ z)^{\mathrm{t}}$ in z-Richtung durch den Graph der Funktion $z = f(x,y) = x^2 - y$ über dem Bereich $D:\ |x| + |y| \leq 1$

Symmetrie des Vektorfeldes und Funktionsgraphen zur yz-Ebene

$\rightsquigarrow$ Integration über den Teilbereich von D mit $x \geq 0$ (Faktor 2)

Gesamtfluss

$$\iint\limits_D -F_x\partial_x f - F_y\partial_y f + F_z\,dxdy = 2\int\limits_0^1 \int\limits_{x-1}^{1-x} -x(2x) + 1 + x^2 - y\,dy\,dx$$

$$= 2\int\limits_0^1 \left[-x^2y + y - \frac{1}{2}y^2\right]_{y=x-1}^{y=1-x} dx =$$

$$= 2\int\limits_0^1 -2x^2(1-x) + 2(1-x) + 0\,dx = \frac{5}{3}$$

Beispiel:

Fluss eines konstanten Vektorfeldes $\vec{F} = \vec{p}$ durch einen Teilbereich S einer Ebene

$$S:\; z = f(x,y) = ax + by + c, \quad (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

in z-Richtung (von unten nach oben)

Formel für den Fluss durch einen Funktionsgraph $\quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \iint\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint\limits_D -ap_x - bp_y + p_z \, dxdy \\ &= \text{area}(D)\,(-ap_x - bp_y + p_z) \end{aligned}$$

$(\partial_x f = a\,,\; \partial_y f = b)$