# Fluss durch eine Sphäre

Der Fluss eines in Kugelkoordinaten dargestellten Vektorfeldes

$$\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$$

von innen nach außen durch eine Sphäre mit Abstand $r = R$ zum Ursprung ist

$$\int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} F_r R^2 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \,,$$

d.h. nur die radiale Komponente des Feldes liefert einen Beitrag. Insbesondere ist der Fluss für ein radiales Feld $\vec{F} = f(r)\,\vec{e}_r$ gleich $4\pi R^2 f(R)$.

# Beispiel:

Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{F} = (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = (r \sin \vartheta)^2 \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \vartheta \\ r \sin \varphi \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

von innen nach außen durch die Sphäre $S$ mit Radius $R$ und Mittelpunkt im Ursprung

radiale Feldkomponente

$$\begin{aligned} F_r(r, \vartheta, \varphi) &= \vec{F} \cdot \vec{e}_r = (r \sin \vartheta)^2 \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \\ &= (r \sin \vartheta)^2 r \sin^2 \vartheta \end{aligned}$$

$r = R \quad \rightsquigarrow \quad$ Fluss von $\vec{F}$ durch $S$

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_S \vec{F} \cdots d\vec{S} &= \iint\limits_S F_r dS = \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} F_r(R, \vartheta, \varphi) \underbrace{R^2 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta}_{dS} \\
&= R^5 \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \underbrace{\sin^5\vartheta}_{(1-\cos^2\vartheta)^2 \sin\vartheta} \, d\varphi \, d\vartheta \\
&= 2\pi R^5 \left[ -\cos\vartheta + \frac{2}{3}\cos^3\vartheta - \frac{1}{5}\cos^5\vartheta \right]_0^{\pi} \\
&= 2\pi R^5 \left( 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \right) = \frac{32}{15}\pi R^5
\end{aligned}
$$

# Beispiel:

Fluss der senkrechten Strömung $\vec{F} = (0,\, 0,\, z)^{\mathrm{t}} = (0,\, 0,\, r\cos\vartheta)^{\mathrm{t}}$ von unten nach oben durch die Halbkugelschale

$$S:\ r = R, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \vartheta \le \pi/2$$

radiale Feldkomponente

$$F_r(r,\vartheta,\varphi) = \vec{F}\cdot\vec{e}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = r\cos^2\vartheta$$

$r = R \quad \rightsquigarrow \quad$ Fluss von $\vec{F}$ durch $S$

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} F_r(R,\vartheta,\varphi)\, a^2 \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} R^3\cos^2\vartheta\sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta$$

$$2\pi R^3 \left[\frac{-\cos^3\vartheta}{3}\right]_{\vartheta=0}^{\pi/2} = \frac{2\pi R^3}{3}$$

# Beispiel:

axialsymmetrisches Feld

$$\vec{F} = F_\varrho(\varrho, z)\vec{e}_\varrho + +F_z(\varrho, z)\vec{e}_z, \quad \vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

radiale Feldkomponente

$$F_r = \vec{F} \cdot \vec{e}_r, \quad \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_\varrho \cdot \vec{e}_r = \sin\vartheta,\ \vec{e}_z \cdot \vec{e}_r = \cos\vartheta \qquad \Longrightarrow$

$$F_r = F_\varrho \sin\vartheta + F_z \cos\vartheta$$

Fluss durch eine Sphäre $S$ mit Radius $R$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (F_\varrho \sin\vartheta + F_z \cos\vartheta)\; R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$= 2\pi R^2 \int_0^{\pi} (F_\varrho \sin\vartheta + F_z \cos\vartheta) \sin\vartheta \, d\vartheta$$

Spezialfall $F_\varrho = \varrho^{2s}$, $F_z = c$: $\quad \varrho = r\sin\vartheta \quad \rightsquigarrow$

$$\vec{F}\cdot\vec{e}_r = F_\varrho \sin\vartheta + F_z\cos\vartheta = R^{2s}\sin^{2s+1}\vartheta + c\cos\vartheta$$

$\int_0^\pi \cos\vartheta \, d\vartheta = 0 \quad \rightsquigarrow \quad$ Fluss von $\vec{F}$ durch $S$

$$\begin{aligned} 2\pi R^2 \int_0^{\pi} R^{2s}\sin^{2s+2}\vartheta \, d\vartheta &= 2\pi R^2 R^{2s} \frac{(2(s+1))!}{2^{2(s+1)}((s+1)!)^2}\,\pi \\ &= 2\pi^2 \left(\frac{R}{2}\right)^{2(s+1)} \binom{2s+2}{s+1} \end{aligned}$$