Flächenintegral

Für eine Fläche S mit regulärer Parametrisierung

$$D \ni (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

und ein Skalarfeld U wird das Integral

$$\iint\limits_S U \, dS = \iint\limits_D U(\vec{r}(u, v)) \, |\vec{n}(u, v)| \, dudv, \quad \vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r},$$

als Flächenintegral von U über S bezeichnet.
Der Wert des Integrals ist unabhängig von der Parametrisierung, insbesondere auch von der Orientierung des Normalenvektors $\vec{n}$.

Beispiel:

Integral eines linearen Skalarfeldes $U = \vec{p} \cdot \vec{r}$ über ein Dreieck

$$D : (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = \vec{a} + u(\vec{b} - \vec{a}) + v\,(\vec{c} - \vec{a})$$

mit $0 \leq u \leq 1\,,\; 0 \leq v \leq 1 - u$
Normale (konstant)

$$\vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r} = \left(\vec{b} - \vec{a}\right) \times (\vec{c} - \vec{a})\,, \quad |\vec{n}| = 2\text{area}\,D$$

$\rightsquigarrow$ Flächenintegral

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-u} \underbrace{\vec{p} \cdot \left(\vec{a} + u(\vec{b} - \vec{a}) + v\,(\vec{c} - \vec{a})\right)}_{U(\vec{r}(u,v)} \underbrace{2\,\text{area}\,D\,dvdu}_{dS}$$

inneres Integral

$$I_v = \int_0^{1-u} \cdots = (1-u)\vec{p}\cdot\vec{a} + (1-u)u\vec{p}\cdot(\vec{b}-\vec{a}) + \frac{(1-u)^2}{2}\vec{p}\cdot(\vec{c}-\vec{a})$$

äußeres Integral

$$\int_0^1 I_v = \frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{p}\cdot(\vec{b}-\vec{a}) + \frac{1}{6}\vec{p}\cdot(\vec{c}-\vec{a})$$

Vereinfachung $\quad \rightsquigarrow$

$$I = \frac{\operatorname{area} D}{3}\,\vec{p}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

(Flächeninhalt $\times$ Wert von f am Schwerpunkt)

Beispiel:

Integral des Skalarfeldes $U = \sqrt{x^2 + y^2}\, z$ über die Fläche

$$S:\ D \ni (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ v \end{pmatrix}, \quad 0 \le u, v \le \pi$$

(um die z-Achse verdrehter Streifen)
Normale

$$\vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r} = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\partial_u \vec{r} \perp \partial_v \vec{r} \quad \Longrightarrow$

$$|\vec{n}| = |\partial_u \vec{r}| \cdot |\partial_v \vec{r}| = \sqrt{1 + u^2}$$

$$U(\vec{r}(u, v)) = \sqrt{u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v}\; v = uv$$

$\rightsquigarrow$ Flächenintegral

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D U|\vec{n}|\, du dv &= \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi uv\sqrt{1+u^2}\, dv\, du \\
&= \frac{\pi^2}{2} \int\limits_0^\pi u\sqrt{1+u^2}\, du = \frac{\pi^2}{2}\left[\frac{1}{3}\left(1+u^2\right)^{3/2}\right]_0^\pi \\
&= \frac{\pi^2}{6}\left((1+\pi^2)^{3/2}-1\right)
\end{aligned}$$