Existenz eines Potentials

Für ein stetiges Vektorfeld $\vec{F}$ auf einem zusammenhängenden Gebiet D existiert ein Potential U genau dann, wenn das Arbeitsintegral wegunabhängig ist.
In diesem Fall ist

$$U(P) = U(P_0) + \int\limits_{C_P} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = \operatorname{grad} U\,,$$

wobei $C_P : t \mapsto \vec{r}(t)$ ein beliebiger in D verlaufender Weg ist, der einen fest gewählten Punkt $P_0 \in D$ mit P verbindet.
Insbesondere ist U bis auf eine Konstante (den Wert $U(P_0)$) eindeutig bestimmt.

Ist das Vektorfeld $\vec{F}$ stetig differenzierbar auf D, so ist

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$$

notwendig für die Existenz eines Potentials.
Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet D ist die Wirbelfreiheit ebenfalls hinreichend.

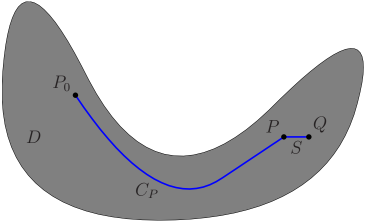
Beweis:

(i) Wegunabhängigkeit notwendig:
$\vec{F} = \text{grad}\, U \quad \Longrightarrow$

$$\int\limits_C \text{grad}\, U \cdot d\vec{r} = U(Q) - U(P)$$

für jeden Weg $C : P \to Q$

(ii) Wegunabhängigkeit hinreichend:
setze $U(P) = \int_C \vec{F}\, d\vec{r}$ mit $C : P_0 \to P$



zeige: $\vec{F} = \operatorname{grad} U$
$\vec{q} = \vec{p} + h\vec{e}_i$, $S : P \to Q \quad \Longrightarrow$

$$U(Q) - U(P) = \int_{C+S} \vec{F}\, d\vec{r} - \int_C \vec{F}\, d\vec{r} = \int_S \vec{F}\, d\vec{r}$$

aufgrund der Wegunabhängigkeit
Parametrisierung

$$S : \vec{r}(t) = \vec{p} + t\vec{e}_i, \quad t \in [0, h]$$

$\rightsquigarrow$

$$\int\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_0^h \vec{F}(\vec{p} + t\vec{e}_i) \cdot \vec{e}_i\, dt = \int\limits_0^h F_i(\vec{p} + t\vec{e}_i)\, dt$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung $\quad \Longrightarrow$

$$\int\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{r} = hF_i(\vec{p} + \tau\vec{e}_i)$$

für ein $\tau \in [0, h]$

i-te Komponente des Gradienten:

$$\partial_i U(P) = \lim_{h\to 0} \frac{U(\vec{p}+h\vec{e}_i) - U(\vec{p})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hF_i(\vec{p}+\tau\vec{e}_i)}{h} = F_i(\vec{p})$$

(iii) Wirbelfreiheit notwendig:
$\vec{F} = \operatorname{grad} U \quad \Longrightarrow$

$$\partial_i F_j - \partial_j F_i = \partial_i \partial_j U - \partial_j \partial_i U = 0$$

(alle Komponenten von $\operatorname{rot} \vec{F}$ null)

(iv) Wirbelfreiheit hinreichend:
D einfach zusammenhängend $\quad \Longrightarrow$
jede geschlossene Kurve C berandet eine Fläche S in D
Satz von Stokes $\quad \Longrightarrow$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

$\Longrightarrow \quad$ Wegunabhängigkeit des Arbeitsintegrals

Beispiel:

Bestimmung eines Potentials U des Vektorfeldes

$$\vec{F} = (\sin y,\ x\cos y)^{\mathrm{t}}$$

U existiert, da

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \partial_x(x\cos y) - \partial_y \sin y = 0$$

und $\vec{F}$ global definiert ist ($\mathbb{R}^2$ ist einfach zusammenhängend)
kanonischer Weg $C_P:\ O \to P$:

$$\vec{r}(t) = (p_1 t,\ p_2 t)^{\mathrm{t}}, \quad t \in [0,1]$$

$\rightsquigarrow$ Potential U ($\vec{F} = \operatorname{grad} U$) mit $U(O) = 0$

$$\begin{aligned} U(P) &= \int_{C_P} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} \sin(p_2 t) \\ (p_1 t)\cos(p_2 t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 p_1 \sin(p_2 t) + p_1 p_2 t\cos(p_2 t)\, dt = [p_1 t \sin(p_2 t)]_0^1 = p_1 \sin p_2 \end{aligned}$$

Beispiel:

lineares Feld

$$\vec{F} = A\vec{r}, \quad A = (a_{j,k})$$

Rotation

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} a_{3,2} - a_{2,3} \\ a_{1,3} - a_{3,1} \\ a_{2,1} - a_{1,2} \end{pmatrix}$$

Existenz eines Potentials $U \quad \Leftrightarrow \quad$ Symmetrie von A

$A = A^{\mathrm{t}} \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} = \operatorname{grad} U$ mit

$$U = \frac{1}{2}\vec{r}^{\,\mathrm{t}} A\vec{r}$$

Beispiel:

Differenziert man das Skalarfeld

$$U = \arctan(y/x) = \varphi, \quad x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi\,,$$

mit der Kettenregel ($d\arctan t/dt = 1/(1+t^2)$), so erhält man das Vektorfeld

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U = \begin{pmatrix} \dfrac{-y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = r^{-1}\vec{e}_\varphi\,.$$

Die Integrabilitätsbedingung ist für $(x, y) \neq (0, 0)$ erfüllt:

$$\partial_y F_x - \partial_x F_y = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

Dennoch ist das Arbeitsintegral entlang eines Kreises $C : x^2 + y^2 = R^2$ nicht null:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \underbrace{R \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt}_{d\vec{r}} = 2\pi$$

$\Longrightarrow \quad \nexists$ global definiertes Potential

kein Widerspruch zu rot $\vec{F} = 0$, da das Definitionsgebiet von $\vec{F}$ nicht einfach zusammenhängend ist

keine stetige (konsistente) Definition von $U = \varphi$ auf einem Kreisring um den Ursprung möglich

Ein Potential existiert (nämlich $U = \varphi$) auf jeder einfach zusammenhängenden Menge, die den Ursprung nicht enthält.