Divergenz

Die Divergenz eines Vektorfeldes

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

wird durch

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

definiert.

Sie ist invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen und entspricht physikalisch der Quelldichte des Vektorfeldes.

Alternativ lässt sich die Divergenz eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes $\vec{F}(P)$ als Grenzwert des Flusses durch die Oberfläche S eines den Punkt P enthaltenden räumlichen Bereichs V definieren:

$$\lim_{\operatorname{diam} V \to 0} \frac{1}{\operatorname{vol} V} \iint\limits_{S} \vec{F} \cdot d\vec{S}\,,$$

wobei das vektorielle Flächenelement $d\vec{S}$ nach außen orientiert ist.

Dies folgt unmittelbar aus dem Satz von Gauß und dem Mittelwertsatz und zeigt insbesondere die Invarianz der Divergenz unter orthogonalen Koordinatentransformationen.

Beispiel:

(i) Zentrales Kraftfeld:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r\vec{e}_r$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial_x x + \partial_y y + \partial_z z = 1 + 1 + 1 = 3$$

(ii) Wirbelförmige Strömung:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \varrho\vec{e}_\varphi$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial_x(-y) + \partial_y x + \partial_z 0 = 0 + 0 + 0 = 0$$