Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten

Für Zylinderkoordinaten

$$x = \varrho \cos\varphi, \quad y = \varrho \sin\varphi, \quad z = z$$

gelten für räumliche Skalarfelder

$$U = \Phi(\varrho, \varphi, z)$$

und Vektorfelder

$$\vec{F} = F_\varrho \vec{e}_\varrho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$$

die Transformationsregeln

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad} U &= \partial_\varrho \Phi \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho}\partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi + \partial_z \Phi \vec{e}_z\,, \\
\operatorname{div} \vec{F} &= \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho F_\varrho) + \frac{1}{\varrho}\partial_\varphi F_\varphi + \partial_z F_z\,, \\
\operatorname{rot} \vec{F} &= \left(\frac{1}{\varrho}\partial_\varphi F_z - \partial_z F_\varphi\right)\vec{e}_\varrho + \left(\partial_z F_\varrho - \partial_\varrho F_z\right)\vec{e}_\varphi \\
&\quad + \frac{1}{\varrho}\left(\partial_\varrho(\varrho F_\varphi) - \partial_\varphi F_\varrho\right)\vec{e}_z
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\Delta U = \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho \partial_\varrho \Phi) + \frac{1}{\varrho^2}\partial_\varphi^2 \Phi + \partial_z^2 \Phi\,.
$$

Beispiel:

(i) Axialsymmetrisches Skalarfeld:

$$U = \Phi(\varrho), \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Gradient und Laplace-Operator

$$\operatorname{grad} U = \varrho \Phi \vec{e}_\varrho = \Phi' \vec{e}_\varrho, \quad \Delta U = \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho \left(\varrho \partial_\varrho \Phi \right) = \Phi'' + \varrho^{-1} \Phi'$$

Spezialfall $U = \varrho^s \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} U &= s \varrho^{s-1} \vec{e}_\varrho = s(x^2 + y^2)^{s/2-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Delta U &= s^2 \varrho^{s-2} \end{aligned}$$

(ii) Quellenförmiges Vektorfeld:

$$\vec{F} = \psi(\varrho)\vec{e}_\varrho$$

Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho \left(\varrho\psi\right) = \psi' + \varrho^{-1}\psi$$

Spezialfall $\vec{F} = \varrho^s \vec{e}_\varrho \quad \rightsquigarrow$

$$\operatorname{div} \vec{F} = (s+1)\varrho^{s-1}$$

divergenzfrei für $s = -1$ bis auf die Singularität im Ursprung

(iii) Wirbelförmiges Vektorfeld:

$$\vec{F} = \psi(\varrho)\vec{e}_\varphi$$

Rotation

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho\left(\varrho\psi\right)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi' + \varrho^{-1}\psi \end{pmatrix}$$

Spezialfall $\vec{F} = \varrho^s \vec{e}_\varphi \quad \rightsquigarrow$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (s+1)\varrho^{s-1} \end{pmatrix}$$

rotationsfrei für $s = -1$ bis auf die Singularität im Ursprung