# Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten

Für Kugelkoordinaten

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta$$

gelten für räumliche Skalarfelder

$$U = \Phi(r, \vartheta, \varphi)$$

und Vektorfelder

$$\vec{F} = F_r\vec{e}_r + F_\vartheta\vec{e}_\vartheta + F_\varphi\vec{e}_\varphi$$

die Transformationsregeln

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad} U &= \partial_r \Phi \vec{e}_r + \frac{1}{r}\partial_\vartheta \Phi \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi, \\
\operatorname{div} \vec{F} &= \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 F_r\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi F_\varphi + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\vartheta\left(\sin\vartheta F_\vartheta\right), \\
\operatorname{rot} \vec{F} &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\partial_\vartheta(\sin\vartheta F_\varphi) - \partial_\varphi F_\vartheta\right)\vec{e}_r \\
&\quad + \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\partial_\varphi F_r - \sin\vartheta\,\partial_r(rF_\varphi)\right)\vec{e}_\vartheta \\
&\quad + \frac{1}{r}\left(\partial_r(rF_\vartheta) - \partial_\vartheta F_r\right)\vec{e}_\varphi
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\Delta U = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\Phi\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\partial_\varphi^2\Phi + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\partial_\vartheta\left(\sin\vartheta\,\partial_\vartheta\Phi\right) .
$$

# Beispiel:

(i) Radialsymmetrisches Skalarfeld:

$$U = \Phi(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Gradient und Laplace-Operator

$$\operatorname{grad} U = \partial_r \Phi \vec{e}_r, \quad \Delta U = \frac{1}{r^2}\partial_r \left(r^2 \partial_r \Phi\right) = \Phi'' + \frac{2}{r}\Phi'$$

Spezialfall $U = r^s \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} U &= s r^{s-1} \vec{e}_r = s(x^2 + y^2 + z^2)^{s/2-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \Delta U &= s(s+1) r^{s-2} \end{aligned}$$

harmonisch für $s = -1$ bis auf die Singularität im Ursprung

(ii) Quellenförmiges Vektorfeld:

$$\vec{F} = \psi(r)\vec{e}_r$$

Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\psi\right) = \psi' + \frac{2}{r}\psi$$

Spezialfall $\vec{F} = r^s\vec{e}_r \quad \rightsquigarrow$

$$\operatorname{div} \vec{F} = (s+2)r^{s-1}$$

divergenzfrei für $s = -2$ bis auf die Singularität im Ursprung